

Masterarbeit

Emulation des Spin-Boson Modells in supraleitenden Schaltkreisen

von

cand. M. Sc. Melanie Hauck

Abgabe: 03. März 2015
Referent: Prof. Dr. Gerd Schön
Koreferent: Prof. Dr. Michael Thorwart
Betreuer: Dr. Michael Marthaler

Masterarbeit

Emulation des Spin-Boson Modells in supraleitenden Schaltkreisen

cand. M. Sc. Melanie Hauck

Abgabe: 03. März 2015

Institut für Theoretische Festkörperphysik (TFP)
am Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht. Die Regeln des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der Fassung vom Mai 2010 habe ich beachtet.

Karlsruhe, den 03. März 2015

Melanie Hauck

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Das Spin-Boson Modell	10
2.1. Spektrale Dichte	11
2.1.1. Subohmsche spektrale Dichte	13
2.2. Definition der Wechselwirkungsregimes	14
2.3. Experimentelle Realisierung in einem Quantenemulator	15
3. Das ultra-starke Wechselwirkungsregime	17
3.1. Transversales, treibendes Feld	18
3.1.1. Longitudinales, treibendes Feld	19
3.1.2. Zweites transversales, treibendes Feld	22
3.2. Verifikation der Näherungen	24
3.3. Fazit	29
4. Modellierung der spektralen Dichte des bosonischen Bades	30
4.1. Ein zentraler Resonator und N Hilfsresonatoren	31
4.1.1. Berechnung der Korrelatoren $\langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R$ und $\langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R$	33
4.1.2. Bewegungsgleichungen im Zeitraum	34
4.1.3. Bewegungsgleichungen im Frequenzraum	35
4.1.4. Lösung im Frequenzraum	37
4.1.5. Kontinuumslimites – Approximation der Reservoirs	40
4.1.6. Spektrale Dichte	42
4.1.7. Numerischer Fit	43
4.1.8. Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator	47
4.2. Asymmetrie des exakten Resonatorspektrums	51
4.3. Diskussion der Ergebnisse	55
5. Zusammenfassung	57
A. Transformationen	61
A.1. Rotierendes Bezugssystem	61

A.2. Wechselwirkungsbild	62
B. Berechnung der spektralen Dichte des bosonischen Bades	65
B.1. Bewegungsgleichungen im Zeitraum	65
B.2. Berechnung der Korrelatoren $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R$ und $\langle a(t)a(0) \rangle_R$	73
C. Parameter des numerischen Fits	75
D. Klassischer, gedämpfter harmonischer Oszillator	77
Abbildungsverzeichnis	79
Tabellenverzeichnis	80
Literaturverzeichnis	81

1. Einleitung

Die der Quantenemulation zugrundeliegende Idee besteht darin, ein kontrollierbares Quantensystem zu verwenden, um andere Quantensysteme, die nicht kontrollierbar oder experimentell zugänglich sind, zu untersuchen. Hierzu soll das zu emulierende System auf ein künstliches, gut kontrollierbares System abgebildet werden, dessen Bestandteile der Quantendynamik des physikalisch interessanten Hamiltonoperators folgen.

„ . . . that there is to be an exact simulation, that the computer will do exactly the same as nature. “ [Fey82]

Geeignete Systeme für die Realisierung von Quantenemulatoren sind beispielsweise ultrakalte Atome und Moleküle, optische Gitter und supraleitende Schaltkreise [HCT⁺12]. Die Entwicklung von Quantenemulatoren ermöglicht es, eine Vielzahl von Problemen zu lösen, bei denen Simulationen auf klassischen Computern an ihre Grenzen stoßen. Dabei sind Quantenemulationen auf umfangreichen Themengebieten von Bedeutung, beginnend bei der Physik der kondensierten Materie über die Kosmologie bis hin zur Quantenchemie [BN09]. Zudem ist die experimentelle Realisierung von Quantenemulatoren bereits mit aktueller Technologie möglich, wohingegen universelle Quantencomputer in absehbarer Zukunft nicht realisiert werden können [Bru12].

Es existieren physikalische Probleme, bei denen die Abbildung zwischen realem und künstlichem System sehr einfach ist. Beispielsweise wird ein Gas bestehend aus wechselwirkenden, bosonischen Atomen in einem periodischen Potential durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben

$$H_{em} = -J \sum_{i,j} a_i^\dagger a_j + \sum_i \epsilon_i n_i + \frac{1}{2} U \sum_i n_i (n_i - 1), \quad (1.1)$$

wobei a_i^\dagger und a_i den bosonischen Erzeugern und Vernichtern am i -ten Gitterplatz entsprechen, n_i die Anzahl Atome angibt und ϵ_i die Energieverschiebung aufgrund eines äußeren Potentials bezeichnet. J definiert den Hüpfparameter zwischen den Gitterplätzen und U die Wechselwirkungsstärke zweier Atome am gleichen Gitterplatz. Der Hamiltonoperator des Bose-Hubbard Modells weist die gleiche Struktur wie der Hamiltonoperator in Gleichung (1.1) auf. Daher ist es naheliegend, einen Quantenemulator für das Bose-Hubbard Modell mithilfe von Atomen in optischen Gittern zu realisieren [GAN14].

Nicht immer kann die Abbildung zwischen dem realen und dem künstlichen System direkt erfolgen. Häufig muss der Hamiltonoperator erst durch Anwenden von Transformationen in eine Form gebracht werden, die sich auf ein künstliches System übertragen lässt. Diese Transformationen können sowohl statisch als auch zeitabhängig sein, wie es beispielsweise beim Spin-Boson Modell der Fall ist.

Quantenemulation wird in Abgrenzung zur digitalen Quantensimulation auf universellen Quantencomputern oft auch als analoge Quantensimulation bezeichnet [BN09]. Während bei der digitalen Quantensimulation die Zeitentwicklung in elementare Quantengatteroperationen übersetzt werden muss, genügt es bei Quantenemulatoren im Allgemeinen eine Abbildung \tilde{U} zu finden, sodass gilt

$$H_{sys} \approx \tilde{U} H_{em} \tilde{U}^\dagger, \quad (1.2)$$

wobei H_{sys} dem Hamiltonoperator des realen Systems und H_{em} dem kontrollierbaren Hamiltonoperator des künstlichen Systems entspricht. Unter Kenntnis der Abbildungsvorschrift lassen sich die Messwerte des Quantenemulators auf das reale System übertragen und damit interessante Effekte im physikalisch relevanten System untersuchen.

Ein Beispiel eines bereits experimentell realisierten, analogen Quantenemulators ist in der Veröffentlichung [BSK⁺12] beschrieben. Dort wurde ein Isingmodell mit einstellbarer Wechselwirkungsstärke, bestehend aus Hunderten von Qubits, mithilfe einer Penning-Falle experimentell realisiert und ermöglichte damit den Zugang zu einem klassisch nicht erreichbaren Regime.

Nicht jedes physikalische System eignet sich für die Realisierung in einem Quantenemulator. Für einen Quantencomputer wurden von DiVincenzo fünf allgemein anerkannte Anforderungen formuliert [DiV96], diese können jedoch nicht direkt auf Quantenemulatoren angewendet werden.

Als Entscheidungsgrundlage beim Quantenemulator lassen sich allerdings in Anlehnung an die Veröffentlichung [HCT⁺12] vier Regeln formulieren. Diesen sollte ein Quantenemulator genügen, damit seine Realisierung sinnvoll ist.

Effizienz Das emulierte Problem sollte in einer Simulation auf klassischen Computern aufgrund begrenzter Rechenzeit und Speicherressourcen nicht oder nur schwer lösbar sein.

Einfachheit Eine gute Kontrollierbarkeit der Initialisierung und Manipulation sowie ein transparenter Auslesevorgang des Quantenemulators müssen gewährleistet sein. Daher ist ein Aufbau, der sehr viel einfacher als der eines Quantencomputers ist, von Vorteil.

Relevanz Das emulierte Modell sollte interessante physikalische Probleme in für klassische Simulationen unzugänglichen Regimes lösen.

Zuverlässigkeit Es sollte eine Verifikation der beobachteten Physik des Quantenemulators stattfinden, sodass sichergestellt ist, dass diese auch tatsächlich die Physik des Systems, welches untersucht werden soll, widerspiegelt.

Im Rahmen dieser Masterarbeit wird ein Quantenemulator für das Spin-Boson Modell entwickelt. Im Folgenden werden die vier Regeln für dieses physikalische System diskutiert. Dabei zeigt sich, dass es den Anforderungen in ausreichendem Maße genügt und damit die Entwicklung eines Quantenemulators in diesem Fall sinnvoll ist.

Feynman und Vernon zeigten in ihrer Veröffentlichung [FV63], dass jede Umgebung effektiv auf harmonische Oszillatoren, die linear an das System gekoppelt sind, abgebildet werden kann, sofern die Kopplung an das System genügend schwach ist. In diesem Beweis wird die weitreichende Bedeutung des Spin-Boson Modells sichtbar. Dieses beschreibt

die Physik eines Zwei-Niveau-Systems, das an ein Bad gekoppelt ist, welches aus harmonischen Oszillatoren besteht und folglich nach der Veröffentlichung [FV63] eine sehr allgemeine Umgebung repräsentiert.

Zudem wird beispielsweise ein System bestehend aus einem Spin gekoppelt an Phononen durch das Spin-Boson Modell beschrieben. Des Weiteren beschreibt es dissipative quantenmechanische Tunnelsysteme bei tiefen Temperaturen und Zwei-Niveau-Atome in optischen Kavitäten [NPTG07]. Abhängig vom zu untersuchenden System kann die Wechselwirkung zwischen System und Umgebung sehr stark sein.

Somit kann mithilfe eines Quantenemulators für das Spin-Boson Modell eine ganze Klasse von Problemen gelöst werden (Relevanz).

Darüber hinaus ist es nicht möglich, das Spin-Boson Modell im Fall sehr starker Kopplung in Verbindung mit einem subohmschen Bad in einer Simulation auf klassischen Computern effizient und eindeutig zu lösen [WDLZ13] (Effizienz).

Der entscheidende Punkt, der für die Entwicklung eines Quantenemulators für das Spin-Boson Modell spricht, ist die Einfachheit. Denn es genügt zur Realisierung ein einziges Qubit, gekoppelt an ein aus Resonatoren bestehendes Bad, wohingegen ein Quantencomputer durch ein wesentlich komplexeres System beschrieben wird.

Während die Ergebnisse eines universellen Quantencomputers durch die Entwicklung der Quanten-Fehler-Korrektur [DMN13] abgesichert sind, existiert bisher keine äquivalente Theorie im Zusammenhang mit Quantenemulatoren. Daher bleibt die Frage nach der Zuverlässigkeit vorerst offen.

Die experimentelle Realisierung des in dieser Masterarbeit diskutierten Aufbaus eines Quantenemulators für das Spin-Boson Modell ist im Rahmen der Dissertation von Jochen Braumüller in der Arbeitsgruppe Ustinov am Physikalischen Institut des Karlsruher Instituts für Technologie vorgesehen.

Zunächst werden im Kapitel 2 das Spin-Boson Modell und das Konzept der spektralen Dichte eingeführt. Bei der Diskussion der vorgeschlagenen experimentellen Realisierung in einem Quantenemulator werden zwei zentrale Fragestellungen aufgeworfen. Zum einen ist das physikalisch interessante Regime nicht direkt umsetzbar, da die entsprechenden

Parameter aufgrund experimenteller Beschränkungen nicht eingestellt werden können. Die Lösung für dieses Problem wird im Kapitel 3 diskutiert und verifiziert. Zum anderen stellt sich die Frage, wie die spektrale Dichte des Bades im Quantenemulator manipuliert werden kann, sodass verschiedene Konfigurationen untersucht werden können. Die Realisierung des bosonischen Bades, die solche Manipulationen zulässt, wird im Kapitel 4 beschrieben.

Im Kapitel 5 werden die zentralen Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln nochmals zusammengefasst.

2. Das Spin-Boson Modell

Der Einfluss einer Umgebung auf ein Zwei-Niveau-System kann mithilfe des Spin-Boson Modells beschrieben werden. Daher wird es in vielen Bereichen verwendet, in denen dissipative Zwei-Zustands-Systeme untersucht werden sollen [LCD⁺87].

Im Rahmen dieser Masterarbeit wird die Realisierung des Spin-Boson Modells in einem analogen Quantenemulator unter Verwendung supraleitender Schaltkreise vorgeschlagen, um eine Möglichkeit zu schaffen, dieses Modell auch in mit herkömmlichen theoretischen und experimentellen Methoden nicht zugänglichen Regimes zu lösen.

Der Spin-Boson Hamiltonoperator ist im Allgemeinen durch folgende Gleichung gegeben (im Folgenden $\hbar = 1$):

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x}_{=H_S} + \underbrace{\sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i}_{=H_R} + \sigma_x \underbrace{\sum_i \overbrace{f_i}^{=g_i} (b_i^\dagger + b_i)}_{=H_{SR}} \quad (2.1)$$

Der erste Term H_S beschreibt das System, der zweite Term H_R das bosonische Bad und der dritte Term H_{SR} die Kopplung des Bades an das System. Das System ist hierbei linear an das bosonische Bad gekoppelt. Die Übergangsenergie des Zwei-Niveau-Systems ist durch ϵ bestimmt, Δ bezeichnet das Tunnelmatrixelement. Letzteres ist für das verwendete Transmon-Qubit vernachlässigbar.

Das bosonische Bad wird durch eine Summe harmonischer Oszillatoren dargestellt, deren Moden, Erzeuger und Vernichter durch ω_i , b_i^\dagger und b_i gegeben sind. Die Kopplungsstärke wird durch f_i charakterisiert.

2.1. Spektrale Dichte

In zweiter Quantisierung wird die Auslenkung des i -ten harmonischen Oszillators durch

$$x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_i\omega_i}} (b_i + b_i^\dagger) \quad (2.2)$$

beschrieben.

Im Spin-Boson Modell wird die Kopplung des Systems durch das Produkt eines Systemoperators O_S und eines Badoperators q_i realisiert, somit wird mit der Einführung der zweiten Quantisierung $O_S \cdot c_i x_i$, mit der Kopplungsstärke c_i , zu $O_S \cdot q_i$. Folglich wird die Kopplungsstärke f_i zudem durch die Masse m_i und die Frequenz ω_i des i -ten harmonischen Oszillators bestimmt.

Zur Charakterisierung des Bades müssten also m_i , ω_i und c_i für jeden Oszillator angegeben werden, das System würde damit durch eine unüberschaubare Anzahl an Freiheitsgraden beschrieben werden. Daher ist das Ziel, all diese Parameter in einer Größe zusammenzufassen, die alle Informationen über die Umgebung enthält. Diese Größe wird als spektrale Dichte $J(\omega)$ bezeichnet und ist durch die folgende Gleichung definiert

$$J(\omega) = 2\pi \sum_i f_i^2 \delta(\omega - \omega_i), \quad (2.3)$$

wobei $\omega > 0$ erfüllt sein muss, da die bosonischen Frequenzen positiv sind. Die spektrale Dichte des Bades beschreibt folglich die frequenzabhängige Kopplung des Systems an das Bad. Sie ist über die nachfolgende Gleichung mit dem Korrelator der Badoperatoren verknüpft:

$$\sum_i \langle q_i(t) q_i(0) \rangle_R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) (-n(-\omega)) e^{-i\omega t} \quad (2.4)$$

Dieser Zusammenhang wird nun im Folgenden hergeleitet.

Durch Einsetzen der Definition von q_i auf der linken Seite von Gleichung (2.4) ergibt

sich unter Verwendung der Identitäten

$$e^{itH_R} b_i^\dagger e^{-itH_R} = e^{i\omega_i t} b_i^\dagger \quad \text{und} \quad e^{itH_R} b_i e^{-itH_R} = e^{-i\omega_i t} b_i \quad (2.5)$$

mit $H_R = \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i$ nachfolgende Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_i \langle q_i(t) q_i(0) \rangle_R &= \sum_i f_i^2 \left(\langle b_i^\dagger b_i \rangle_R e^{i\omega_i t} + \langle b_i b_i^\dagger \rangle_R e^{-i\omega_i t} \right) \\ &\quad + \sum_i f_i^2 \left(\underbrace{\langle b_i b_i \rangle_R}_{=0} e^{-i\omega_i t} + \underbrace{\langle b_i^\dagger b_i^\dagger \rangle_R}_{=0} e^{i\omega_i t} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da das Reservoir durch Fockzustände aufgespannt wird, tragen die letzten beiden Summanden nicht bei. Bosonen sind entsprechend der Bose-Einstein-Statistik verteilt. Es gilt folglich

$$n(\omega) \equiv \langle b_i^\dagger b_i \rangle_R = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad \text{und} \quad 1 + n(\omega) = -n(-\omega). \quad (2.7)$$

Damit wird Gleichung (2.6) zu

$$\sum_i \langle q_i(t) q_i(0) \rangle_R = \sum_i f_i^2 (n(\omega) e^{it\omega_i} - n(-\omega) e^{-it\omega_i}). \quad (2.8)$$

Gleichung (2.3) definiert den Übergang hin zu kontinuierlichen Frequenzen. Sofern $J(\omega) = -J(-\omega)$ gilt, ergibt sich demzufolge

$$\sum_i \langle q_i(t) q_i(0) \rangle_R = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) (n(\omega) e^{it\omega} - n(-\omega) e^{-it\omega}) \quad (2.9)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) (-n(-\omega)) e^{-it\omega}. \quad (2.10)$$

Das heißt, die Fouriertransformierte der spektralen Dichte multipliziert mit der negativen bosonischen Besetzungszahl negativer Frequenzen bestimmt den Badkorrelator.

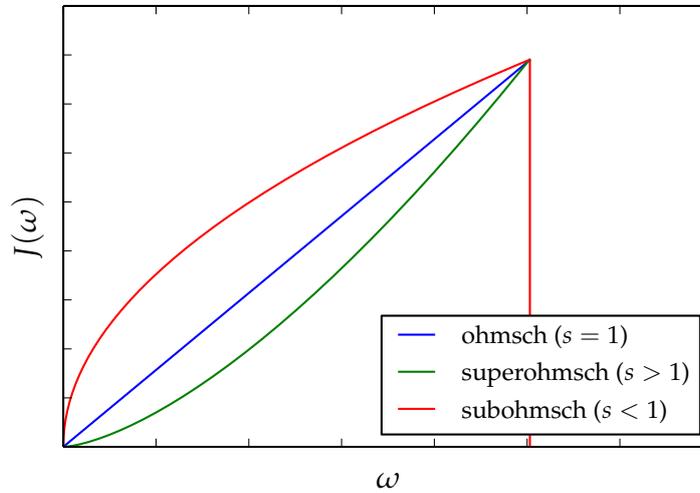


Abbildung 2.1.: Ohmsche ($s = 1$), subohmsche ($s < 1$) und superohmsche ($s > 1$) spektrale Dichte.

Damit ist die Gültigkeit des Zusammenhangs aus Gleichung (2.4) zwischen dem Korrelator der Badoperatoren und der spektralen Dichte, die die frequenzabhängige Kopplung des Systems an das Bad beschreibt, gezeigt.

2.1.1. Subohmsche spektrale Dichte

Wie bereits festgestellt wurde, werden alle Effekte des Bades in der spektralen Dichte zusammengefasst. Daher genügt es, die spektrale Dichte $J(\omega)$ zu betrachten, um den Einfluss des Bades auf die Systemdynamik vorauszusagen.

Die spektrale Dichte kann mithilfe des nachfolgenden Potenzgesetzes parametrisiert werden

$$J(\omega) = 2\alpha\omega_c^{1-s}\omega^s \cdot \text{Cut}(\omega, \omega_c), \quad (2.11)$$

wobei α eine dimensionslose Konstante ist, die die Kopplungsstärke angibt, und ω_c die Cutoff-Frequenz repräsentiert. $\text{Cut}(\omega, \omega_c)$ beschreibt eine Cutoff-Funktion, beispielsweise eine Lorentzkurve oder einen scharfen Cutoff, wie er in Abbildung 2.1 zu sehen ist. In den nachfolgenden Kapiteln wird die subohmsche spektrale Dichte mit einem Lorentz-Cutoff verwendet.

Des Weiteren sind in Abbildung 2.1 drei mögliche Konfigurationen der spektralen Dichte skizziert. Die Wahl des Parameters s bestimmt den Verlauf der spektralen Dichte bei kleinen Frequenzen.

- $s = 1$: ohmsche spektrale Dichte
- $s > 1$: superohmsche spektrale Dichte
- $0 < s < 1$: subohmsche spektrale Dichte

Da beispielsweise beim superohmschen Spektrum die Moden niedriger Energie kaum an das System koppeln (flacher Verlauf von $J(\omega)$), werden Anregungen in diesem Bereich vom Bad kaum absorbiert. Anders ist dies beim subohmschen Spektrum, da hier bereits niederfrequente Moden relativ stark an das System koppeln.

Es existieren Ansätze, diesen letzten Fall auf klassischen Computern zu lösen, sofern $s \ll 1$. Allerdings bietet die detaillierte Dynamik im starken Wechselwirkungsregime im Fall des subohmschen Spin-Boson Modells mit $0 < s < 1/2$ weiterhin Anlass zu Diskussionen [WDLZ13]. Dieses Problem soll im Rahmen dieser Masterarbeit mithilfe des Quantenemulators für das Spin-Boson Modell gelöst werden.

2.2. Definition der Wechselwirkungsregimes

In Anlehnung an den Terminus „ultra-starkes Kopplungsregime“ beim Jaynes-Cummings Modell ([BRGR⁺12]) werden im Folgenden die Begriffe „schwaches“ und „ultra-starkes Wechselwirkungsregime“ definiert.

Das schwache Wechselwirkungsregime beschreibt den Fall, dass die spektrale Dichte ausgewertet bei der Energie des Zwei-Niveau-Systems sehr viel kleiner als diese selbst ist.

$$J(\epsilon) \ll \epsilon \quad (2.12)$$

Entsprechend ist der Übergang zum ultra-starken Wechselwirkungsregime dadurch gekennzeichnet, dass die spektrale Dichte ausgewertet bei der Energie des Zwei-Niveau-Systems deren Größenordnung erreicht.

$$J(\epsilon) \gtrsim \epsilon \quad (2.13)$$

Letzteres Regime bezeichnet den Fall, der im Quantenemulator unter Verwendung eines subohmschen Bades untersucht werden soll.

2.3. Experimentelle Realisierung in einem Quantenemulator

In dieser Masterarbeit zur Emulation des Spin-Boson Modells basierend auf supraleitenden Schaltkreisen wird die Realisierung des Quantenemulators durch ein Qubit als Zwei-Niveau-System und Resonatoren zur Erzeugung der gewünschten spektralen Dichte des Bades vorgeschlagen.

Der konzeptionelle Aufbau des Quantenemulators ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Der Bandpass ist umklammert, da er nur benötigt wird, wenn das Bad mithilfe gekoppelter Resonatoren bestehend aus einem zentralen Resonator und N Hilfsresonatoren realisiert wird, wie dies im Abschnitt 4.1 der Fall ist. Werden N Resonatoren jeweils direkt an das Qubit gekoppelt (siehe Abschnitt 4.2), wird er nicht benötigt.

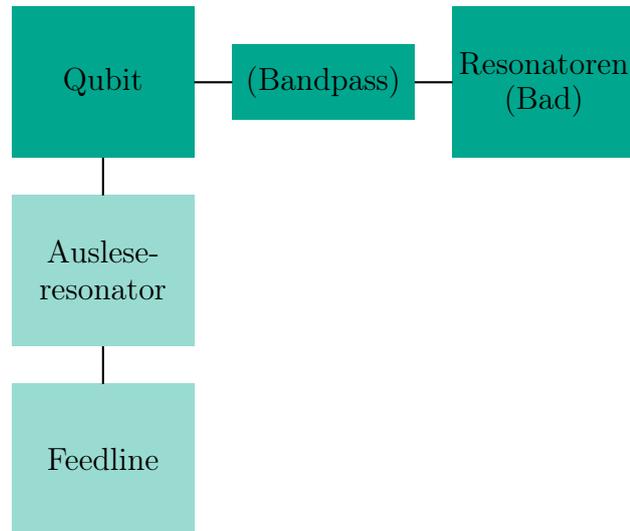


Abbildung 2.2.: Konzept des Quantenemulators für das Spin-Boson Modell.

Im Experiment sind Energien des Zwei-Niveau-Systems in der Größenordnung von 8 GHz und Kopplungsstärken bis zu 300 MHz umsetzbar. Somit ist eine Untersuchung des schwachen Wechselwirkungsregimes im Quantenemulator direkt zugänglich. Allerdings ist die Einstellung des ultra-starken Wechselwirkungsregimes nicht direkt möglich, da die Kopplungsparameter die Größenordnung der Energien des Zwei-Niveau-Systems nicht erreichen können.

Es ergeben sich folglich zwei zentrale Probleme bei der Realisierung des Spin-Boson Modells in einem Quantenemulator. Zum einen stellt sich die Frage, durch welche Parameter die spektrale Dichte des Bades, welche durch eine Anordnung von Resonatoren repräsentiert wird, manipuliert werden kann, sodass verschiedene Konfigurationen eingestellt werden können (siehe Kapitel 4). Zum anderen ist die Bedingung des ultra-starken Wechselwirkungsregimes nicht direkt in dem vorgeschlagenen System aus Qubit und Resonatoren realisierbar. In Kapitel 3 wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie mithilfe geschickt gewählter treibender Felder dieses Regime dennoch erreicht werden kann.

3. Das ultra-starke Wechselwirkungsregime

Aufgrund experimenteller Beschränkungen ist eine Emulation des Spin-Boson Modells unter Verwendung von supraleitenden Schaltkreisen im ultra-starken Wechselwirkungsregime nicht realisierbar. Allerdings beschreibt dieses den physikalisch interessanten Fall, der im Quantenemulator untersucht werden soll. Daher wird im Folgenden eine Möglichkeit aufgezeigt, wie es dennoch möglich ist, im Rahmen der experimentellen Vorgaben mithilfe des vorgeschlagenen Quantenemulators sowohl das schwache als auch das ultra-starke Wechselwirkungsregime zu realisieren.

Die zugrundeliegende Idee besteht darin, mit einem zeitabhängigen Hamiltonoperator im Laborsystem zu starten, wobei die Zeitabhängigkeit aus zwei treibenden Feldern resultiert. Durch eine geschickte Transformation ins rotierende Bezugssystem ergibt sich ein Hamiltonoperator, der die gleiche Struktur wie das Spin-Boson Modell aufweist. Im Laborsystem ohne treibende Felder waren die Parameter durch experimentelle Beschränkungen nicht frei wählbar. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, dass mit der vorgeschlagenen Methode die Parameter im rotierenden Bezugssystem mithilfe der treibenden Felder manipuliert werden können, sodass sowohl das schwache als auch das ultra-starke Wechselwirkungsregime effektiv untersucht werden können.

Im Folgenden werden zwei Varianten vorgestellt, mit denen sich das ultra-starke Wechselwirkungsregime im rotierenden Bezugssystem realisieren lässt. Zunächst wird in beiden Fällen ein transversales treibendes Feld angelegt. Die beiden Varianten unterscheiden sich lediglich in der Wahl des zweiten treibenden Feldes.

3.1. Transversales, treibendes Feld

In diesem Abschnitt wird zunächst nur ein treibendes Feld angelegt, welches transversal an das Qubit koppelt. Der resultierende Hamiltonoperator im Laborsystem ist durch die folgende Gleichung gegeben

$$H_t = \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i f_i (b_i^\dagger + b_i) + A\sigma_x \cos(\omega_{dr}t), \quad (3.1)$$

wobei die ersten drei Terme dem Spin-Boson Hamiltonoperator und der letzte Term dem transversalen, treibenden Feld entspricht. Dadurch wird der Hamiltonoperator zeitabhängig. Um wieder einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator zu erhalten, wird Gleichung (3.1) mithilfe von

$$U_{rf} = e^{i\omega_{dr}t(\sum_i b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2}\sigma_z)} \quad (3.2)$$

in das mit der Frequenz des treibenden Feldes rotierende Bezugssystem transformiert (siehe Anhang A.1). Nach der Anwendung der Rotating Wave Approximation (RWA) führt dies zum folgenden Hamiltonoperator:

$$H'_t = \frac{1}{2}(\epsilon - \omega_{dr})\sigma_z + \frac{1}{2}A\sigma_x + \sum_i (\omega_i - \omega_{dr}) b_i^\dagger b_i + \underbrace{\sum_i f_i (\sigma_- b_i^\dagger + \sigma_+ b_i)}_{(1)}. \quad (3.3)$$

Es ergibt sich also ein zeitunabhängiges Ergebnis. Das Ziel ist es, einen Hamiltonoperator der Form

$$H = \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}\sigma_z + \frac{1}{2}\tilde{\Delta}\sigma_x + \sum_i \tilde{\omega}_i b_i^\dagger b_i + \sigma_x \underbrace{\sum_i f_i (b_i^\dagger + b_i)}_{(2)} \quad (3.4)$$

zu emulieren, allerdings sollen die Parameter $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\omega}_i$ und $\tilde{\Delta}$ frei wählbar sein, um folglich verschiedene Wechselwirkungsregimes realisieren zu können. Im Laborsystem sind die Parameter sehr stark beschränkt, dort ist es nur möglich, das schwache Wechselwirkungsregime umzusetzen.

Beim Vergleich der Hamiltonoperatoren aus Gleichung (3.4) und Gleichung (3.3) fällt auf, dass sie bis auf die Kopplungsterme, die mit (1) und (2) gekennzeichnet sind, übereinstimmen. Um nun auch den Kopplungsterm im rotierenden Bezugssystem auf die gewünschte Form zu bringen, wird ein zweites treibendes Feld angelegt. Hierbei existieren mehrere Möglichkeiten, ein zusätzliches treibendes Feld einzubringen.

Im Folgenden werden die Realisierungen unter Verwendung eines longitudinalen Feldes und eines zweiten transversalen Feldes diskutiert.

3.1.1. Longitudinales, treibendes Feld

In der Veröffentlichung [LSK⁺13] wird ein longitudinal getriebenes Qubit an einen Resonator mit einer Mode gekoppelt, wobei ein zusätzliches transversales, treibendes Feld (analog zu dem in Gleichung (3.1)) angelegt wird. Es wird gezeigt, dass im rotierenden Bezugssystem ein Hamiltonoperator mit manipulierbaren Parametern entsteht.

In Anlehnung an diese Rechnung wird das in Gleichung (3.1) beschriebene System durch ein zusätzliches longitudinales, treibendes Feld erweitert. Es ergibt sich im Laborsystem der folgende Hamiltonoperator

$$H_{ld} = \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i f_i (b_i^\dagger + b_i) + \underbrace{A \cos(\omega_{dr}t)\sigma_x}_{\text{transversal}} + \underbrace{\frac{1}{2}\eta \cos(\Omega t)\sigma_z}_{\text{longitudinal}} . \quad (3.5)$$

Unter Verwendung der Transformation aus Gleichung (3.2) ergibt sich analog zu Gleichung (3.3)

$$H'_{ld} = \frac{1}{2}(\epsilon + \eta \cos \Omega t - \omega_{dr}) \sigma_z + \frac{1}{2} A \sigma_x + \sum_i (\omega_i - \omega_{dr}) b_i^\dagger b_i + \sum_i f_i (\sigma_- b_i^\dagger + \sigma_+ b_i). \quad (3.6)$$

Nun wird dieser Hamiltonoperator ins Wechselwirkungsbild bezüglich des transversalen, treibenden Feldes $H_t = 1/2 A \sigma_x$ übertragen.

$$H'_{ld,I} = e^{iH_t t} \left\{ H'_{ld} - H_t \right\} e^{-iH_t t} \quad (3.7)$$

Dieser Hamiltonoperator wird nun in der rotierten Spinbasis $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ dargestellt. Diese Basistransformation wird durch Anwendung der Hadamard-Transformation erreicht $\tilde{H}'_{ld,I} = \mathcal{H}^\dagger H'_{ld,I} \mathcal{H}$, wobei

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Das Ergebnis lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}'_{ld,I} = & \frac{\epsilon - \omega_{dr}}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{iAt} \\ e^{-iAt} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{4} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(A+\Omega)t} + e^{i(A-\Omega)t} \\ e^{-i(A-\Omega)t} + e^{-i(A+\Omega)t} & 0 \end{pmatrix} \\ & + \sum_i (\omega_i - \omega_{dr}) b_i^\dagger b_i + \sum_i \frac{f_i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^{iAt} \\ -e^{-iAt} & -1 \end{pmatrix} b_i^\dagger + \begin{pmatrix} 1 & -e^{iAt} \\ e^{-iAt} & -1 \end{pmatrix} b_i \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Parameter der treibenden Felder sind bislang nahezu beliebig wählbar. Nun wird eine Abhängigkeit zwischen der Amplitude A des transversalen Feldes und der Frequenz Ω des longitudinalen Feldes hergestellt, um eine weitere Vereinfachung des Hamiltonoperators zu ermöglichen. Es werden $A = \Omega$ gewählt und anschließend die verbleibenden zeitabhängigen Terme vernachlässigt. Diese Approximation ist umso besser, je höher die

Frequenz Ω des longitudinalen Feldes ist.

Der verbleibende zeitunabhängige Hamiltonoperator in der ursprünglichen Basis lautet wie folgt:

$$H'_{ld,I} = \frac{1}{2} \frac{\eta}{2} \sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_{dr}) b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i \frac{f_i}{2} (b_i^\dagger + b_i) \quad (3.10)$$

Die Herleitung von $H'_{ld,I}$ erfolgt analog zu der im Anhang A.2 beschriebenen Rechnung. Beim Vergleich der Hamiltonoperatoren aus Gleichung (2.1) und Gleichung (3.10) wird deutlich, dass die Struktur übereinstimmt. Das heißt, dass es mithilfe zweier treibender Felder gelungen ist, das Spin-Boson Modell im rotierenden Bezugssystem zu realisieren. Die beiden Gleichungen unterscheiden sich lediglich durch die Parameter, die die Energie des Systems, die Moden des Bades und die Kopplungsstärke bestimmen.

Im Laborsystem wurde die Energie des Zwei-Niveau-Systems durch die Energie des Qubits bestimmt, dahingegen kann sie im rotierenden Bezugssystem allein durch die Amplitude des longitudinalen Feldes eingestellt werden, welche durch keine der anderen Parameter beschränkt und damit im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten frei wählbar ist. Des Weiteren werden die Moden des Bades im rotierenden Bezugssystem durch die Frequenz des transversalen Feldes renormiert. Damit ist es möglich, effektiv kleine Energiemoden im Bad zu erreichen, wohingegen im Laborsystem die Resonatoren für verschwindend kleine Moden unendlich lang sein müssten ($\omega \propto \lambda^{-1}$), was aufgrund der Größe des Quantenemulators schwer realisierbar wäre.

Die Parameter des Spin-Boson Modells im rotierenden Bezugssystem können somit nahezu beliebig variiert werden, sodass es mit diesem Konzept nun möglich ist, sowohl das schwache als auch das ultra-starke Wechselwirkungsregime einzustellen. Dies geschieht allein durch die Veränderung der Parameter der treibenden Felder.

3.1.2. Zweites transversales, treibendes Feld

Für das Konzept des vorherigen Abschnitts wurde die Frequenz des Qubits getrieben. Im Folgenden wird eine Alternative zum Unterabschnitt 3.1.1 aufgezeigt, bei der ein zweites transversales, treibendes Feld an das Qubit angelegt wird.

Die nachfolgende Rechnung basiert auf der Veröffentlichung [BRGR⁺12], wo sie für ein Qubit, das an eine Mode eines Resonators koppelt, durchgeführt wurde. Der Hamiltonoperator mit zwei transversalen, treibenden Feldern lautet wie folgt

$$H_{td} = \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i f_i (b_i^\dagger + b_i) + A_1\sigma_x \cos(\omega_1 t) + A_2\sigma_x \cos(\omega_2 t), \quad (3.11)$$

wobei A_i und ω_i der Amplitude und Frequenz des i -ten transversalen, treibenden Feldes entsprechen. Die Form der Kopplungsterme an die treibenden Felder ist so gewählt, dass sie der Kopplung zwischen Qubit und Resonator gleichen.

Analog zum vorherigen Abschnitt wird der Hamiltonoperator zunächst ins rotierende Bezugssystem des ersten transversalen treibenden Feldes übertragen. Es ergibt sich nach der Rotating Wave Approximation (RWA)

$$H'_{td} = \frac{1}{2}(\epsilon - \omega_1)\sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i + \sum_i f_i (\sigma_- b_i^\dagger + \sigma_+ b_i) + \frac{1}{2}A_1\sigma_x + \frac{1}{2}A_2(\sigma_+ e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \sigma_- e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}). \quad (3.12)$$

Der Kopplungsterm an das erste transversale, treibende Feld ist nun zeitunabhängig $H_{K1} = \frac{1}{2}A_1\sigma_x$. Er wird im Folgenden als führende Kopplung behandelt, wohingegen die Kopplung an das zweite treibende Feld störtheoretisch berücksichtigt werden soll. Daher wird der Hamiltonoperator nun ins Wechselwirkungsbild bezüglich H_{K1} transformiert.

$$H'_{td,I} = e^{iH_{K1}t} \left\{ H'_{td} - H_{K1} \right\} e^{-iH_{K1}t} \quad (3.13)$$

Eine ausführliche Rechnung an dieser Stelle ist im Anhang A.2 zu finden.

In der rotierten Spinbasis $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ ergibt sich folgender Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \tilde{H}'_{td,I} &= \frac{\epsilon - \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & 0 \end{pmatrix} + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i \\ &+ \sum_i \frac{f_i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^{iA_1 t} \\ -e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} b_i^\dagger + \begin{pmatrix} 1 & -e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} b_i \right\} \\ &+ \frac{A_2}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^{iA_1 t} \\ -e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \begin{pmatrix} 1 & -e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dieser Hamiltonoperator kann wiederum vereinfacht werden, indem $\omega_1 - \omega_2 = A_1$ gewählt wird. In diesem Fall lassen sich für genügend großes A_1 alle verbleibenden zeitabhängigen Terme vernachlässigen. Diese Näherung ist umso besser, je größer die Amplitude des ersten treibenden Feldes ist. Das heißt, die Frequenzen der angelegten Felder sollten möglichst sehr verschieden gewählt werden, da ihre Differenz durch die Amplitude des ersten Feldes bestimmt wird.

Der resultierende, zeitunabhängige Hamiltonoperator in der ursprünglichen Basis ist durch

$$H'_{td,I} = \frac{1}{2} \frac{A_2}{2} \sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i \frac{f_i}{2} (b_i^\dagger + b_i) \quad (3.15)$$

gegeben. Wie im vorangegangenen Abschnitt ergibt sich im Wechselwirkungsbild des rotierenden Bezugssystems der Spin-Boson Hamiltonoperator mit durch die Parameter der treibenden Felder einstellbaren Energien. Damit ist es auch in dieser Realisierung möglich, sowohl das schwache als auch das ultra-starke Wechselwirkungsregime einzustellen.

3.2. Verifikation der Näherungen

In der Veröffentlichung [BRGR⁺12] wurde eine Methode zur Verifikation der in den vorangehenden Abschnitten angewendeten Näherungen vorgestellt. Unter Verwendung dieses Verfahrens wird nun die Herleitung aus Abschnitt 3.1.2 verifiziert.

Im Folgenden wird die einfachste Wahl eines Bades getroffen, dieses besteht nunmehr aus nur einem Resonator. Es werden zwei transversale, treibende Felder angelegt, deren Amplitude ist in Analogie zu [BRGR⁺12] mit einem Faktor 2 versehen.

$$H_V = \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \omega_{res}b^\dagger b + g\sigma_x(b^\dagger + b) + 2A_1\sigma_x \cos(\omega_1 t) + 2A_2\sigma_x \cos(\omega_2 t) \quad (3.16)$$

Die Gültigkeit der Approximationen des Hamiltonoperators ist durch die folgende Wahl der Parameter gegeben:

1. $\epsilon - \omega_1 \approx 0$
2. $\omega_{eff} := \omega_{res} - \omega_1 \approx A_2$
3. $\omega_1 - \omega_2 = 2A_1$
4. $g, A_2 \ll A_1$
5. Je größer A_1 , desto besser ist die Näherung.

Zur Verifikation wird die Besetzungswahrscheinlichkeit des Qubitgrundzustandes über der Zeit aufgetragen. Das Qubit befindet sich dabei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|g, 0\rangle$. Die Zeitentwicklung wird zunächst unter Verwendung des Hamiltonoperators H_V berechnet. Dies entspricht jeweils den roten Kurven in den Abbildungen. Die schnellen Oszillationen rühren daher, dass es sich bei H_V um den Hamiltonoperator im Laborsystem handelt. Nur die Einhüllende ist hier von physikalischer Bedeutung, da sie die Besetzungswahrscheinlichkeit im rotierenden Bezugssystem beschreibt.

In einem weiteren Schritt erfolgt die Berechnung der Zeitentwicklung unter Verwendung des approximierten Hamiltonoperators $H'_{V,I}$.

$$H'_{V,I} = \frac{1}{2}A_2\sigma_z + (\omega_{res} - \omega_1) b^\dagger b + \frac{g}{2}\sigma_x (b^\dagger + b) \quad (3.17)$$

Die Resultate werden durch die blauen Kurven in den nachfolgenden Abbildungen repräsentiert.

Beschreiben die Einhüllende der roten Kurve und die blaue Kurve den selben Verlauf, so sind die vorgenommenen Approximationen legitim. Abweichungen sind ein Maß für die Gültigkeit der Näherungen.

Zunächst wurden die Berechnungen mit den Parametern aus [BRGR⁺12] durchgeführt. Dabei ist $A_1 = 700 \cdot 2\pi$ MHz, $\epsilon = 8.01 \cdot 2\pi$ GHz, $\omega_{res} = 8.01 \cdot 2\pi$ GHz, $g = 20 \cdot 2\pi$ MHz, $\omega_1 = 8 \cdot 2\pi$ GHz und $\omega_2 = 6.6 \cdot 2\pi$ GHz.

In Abbildung 3.1 wurde die Amplitude A_2 des zweiten treibenden Feldes Null gewählt. Der markante Abfall auf $P_q = 0.5$ und der periodisch wiederkehrende Anstieg auf $P_q = 1$ sind in beiden Kurven vorhanden. Insgesamt wird der Verlauf der Einhüllenden der roten Kurve durch die blaue Kurve des genäherten Hamiltonoperators sehr gut wiedergegeben.

Die Einhüllende der roten Kurve in Abbildung 3.2 stimmt sehr gut mit der approximierten Lösung, die als blaue Kurve eingetragen wurde, überein. Die Periodizität der Kurve wird durch das zweite treibende Feld, dessen Amplitude nicht länger den Wert Null annimmt, aufgehoben.

Sehr ähnliche Resultate wurden in [BRGR⁺12] unter Verwendung des mit der Rotating Wave Approximation genäherten Kopplungsterms im Laborsystem erzielt.

Die oben genannten Parameter sind allerdings in dem vorgesehenen Experiment unter Verwendung eines Transmon-Qubits nicht realisierbar.

Demzufolge wird die gleiche Analyse der Näherungen im Folgenden mit experimentell realisierbaren Parametern wiederholt. Dabei ist $A_1 = 300 \cdot 2\pi$ MHz, $\epsilon = 5 \cdot 2\pi$ GHz, $\omega_{res} = 5 \cdot 2\pi$ GHz, $g = 10 \cdot 2\pi$ MHz, $\omega_1 = 4.995 \cdot 2\pi$ GHz und $\omega_2 = 4.395 \cdot 2\pi$ GHz. Wie in

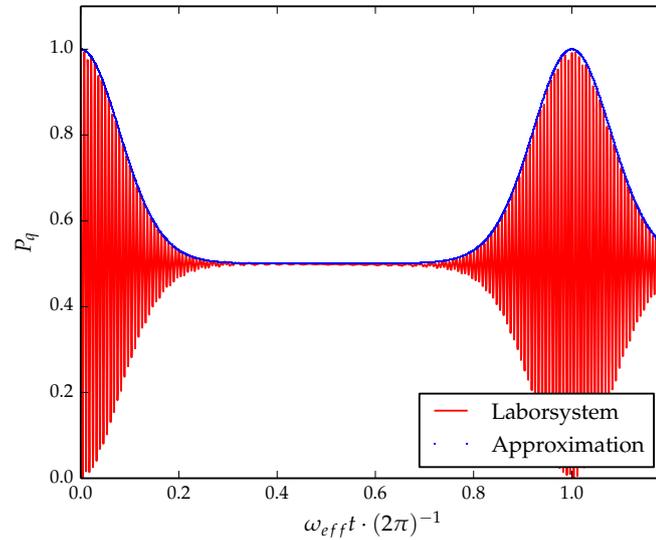


Abbildung 3.1.: P_q mit $A_2 = 0$ durch Integration des exakten (rot) und des approximierten (blau) Hamiltonoperators; Parameter aus [BRGR⁺12].

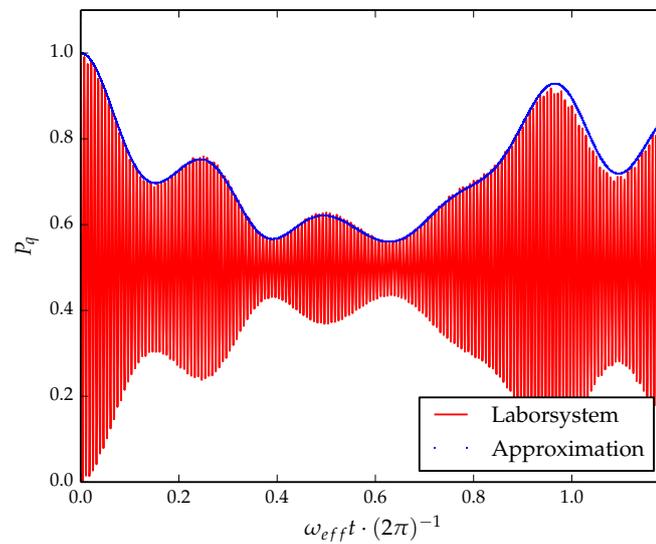


Abbildung 3.2.: P_q mit $A_2 = 0.01 \cdot 2\pi$ MHz durch Integration des exakten (rot) und des approximierten Hamiltonoperators (blau); Parameter aus [BRGR⁺12].

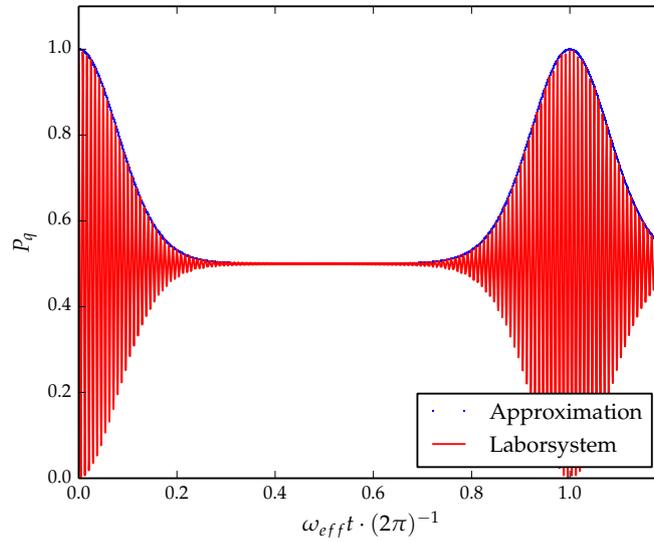


Abbildung 3.3.: P_q mit $A_2 = 0$ durch Integration des exakten (rot) und des approximierten Hamiltonoperators (blau).

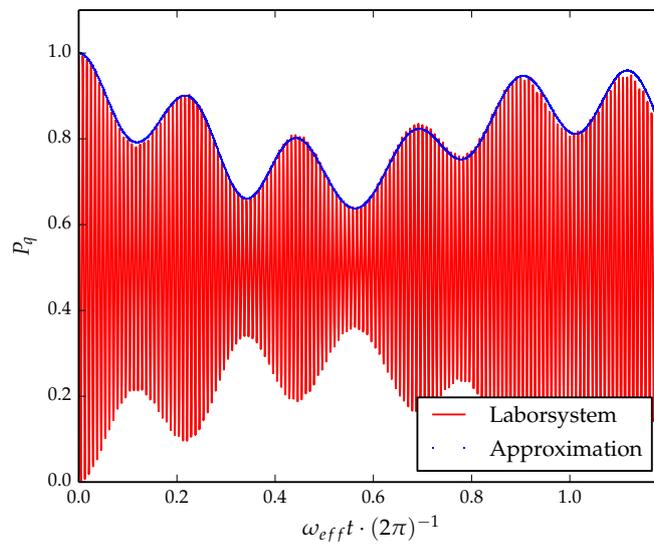


Abbildung 3.4.: P_q mit $A_2 \neq 0$ durch Integration des exakten (rot) und des approximierten Hamiltonoperators (blau).

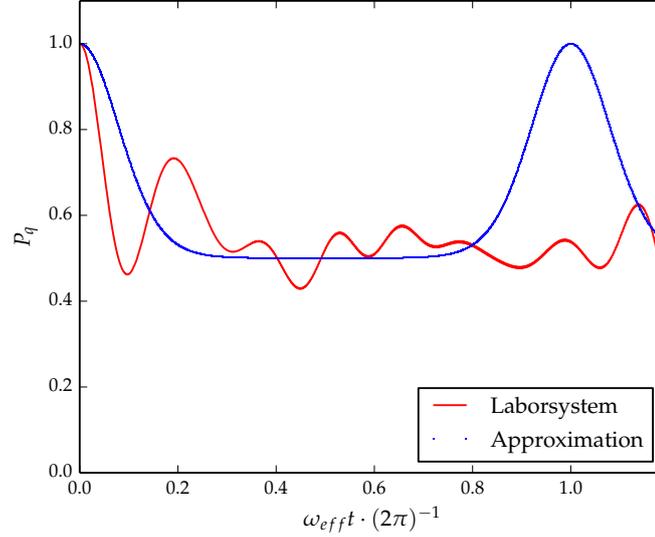


Abbildung 3.5.: P_q mit $A_2 = 0$ durch Integration des exakten (rot) und des approximierten Hamiltonoperators (blau); Zusammenbruch der Näherung.

den Abbildungen 3.3 und 3.4 beim Vergleich der Kurven zu erkennen ist, passen auch hier die Ergebnisse des exakten Hamiltonoperators H_V sehr gut zu denen des approximierten $H'_{V,I}$. Somit ist die Gültigkeit der Näherungen für diese Parameter gezeigt.

In der Abbildung 3.5 ist die Zeitentwicklung für den Fall $A_1 = 10$ MHz dargestellt. Dies entspricht einer verhältnismäßig kleinen Amplitude des ersten treibenden Feldes. Die anderen Parameter wurden entsprechend der Bedingungen für die Näherungen gewählt: $A_2 = 0$, $\epsilon = 5 \cdot 2\pi$ GHz, $\omega_{res} = 5 \cdot 2\pi$ GHz, $g = 10 \cdot 2\pi$ MHz, $\omega_1 = 4.995 \cdot 2\pi$ GHz und $\omega_2 = 4.975 \cdot 2\pi$ GHz.

In Abbildung 3.5 wird deutlich, dass die approximierte Lösung weiterhin das aus den vorherigen Fällen gezeigte Profil für $A_2 = 0$ aufweist. Die blaue Kurve beginnt bei 1, fällt anschließend auf den Wert 0.5 ab, um dann wieder periodisch auf den Wert 1 anzuheben. Dahingegen zeigt die Zeitentwicklung im Laborsystem ein grundlegend anderes Verhalten. Es sind weiterhin Oszillationen zu erkennen, deren Einhüllende wird aller-

dings nicht weiter durch die blaue Kurve beschrieben. Des Weiteren ist die Periodizität der roten Kurve nicht mehr vorhanden. Die zu klein gewählte Amplitude A_1 führt somit zum Zusammenbruch der Gültigkeit der approximierten Lösung.

3.3. Fazit

Damit ist die Fragestellung nach der Realisierung des ultra-starken Wechselwirkungsregimes im Quantenemulator beantwortet. Es kann entweder durch Anlegen zweier transversaler, treibender Felder oder je eines transversalen und eines longitudinalen, treibenden Feldes im Wechselwirkungsbild des rotierenden Bezugssystems eingestellt werden.

In der Kooperation mit der experimentellen Gruppe von Professor Ustinov ist die zweite Realisierung vorgesehen. Es soll ein Transmon Qubit mit einem Chip gekoppelt werden. Auf diesem ist das Bad mit der gewählten spektralen Dichte, bestehend aus Resonatoren, implementiert. Durch Anlegen zweier transversaler Felder kann somit unter anderem das ultra-starke Wechselwirkungsregime untersucht werden.

4. Modellierung der spektralen Dichte des bosonischen Bades

Im vorherigen Kapitel wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem das ultra-starke Wechselwirkungsregime im Quantenemulator für das Spin-Boson Modell erreicht werden kann. Eine letzte Hürde zur Realisierung des Quantenemulators stellt die Modellierung der spektralen Dichte des bosonischen Bades dar.

In diesem Kapitel wird nun eine Realisierung vorgeschlagen, bei der durch die Veränderung der Bauteilparameter beliebige spektrale Dichten erzeugt werden können. Wie bereits in Abschnitt 2.3 angemerkt, soll das bosonische Bad hierbei aus Resonatoren aufgebaut werden, wobei deren Güte, Kopplung und Frequenz den Verlauf der spektralen Dichte bestimmen. Abbildung 4.1 illustriert die zugrundeliegende Idee. Die blaue Kurve beschreibt die spektrale Dichte der Resonatoren, die rote Kurve gibt den Verlauf an, der im Quantenemulator realisiert werden soll, hier beispielsweise ein ohmsches Bad mit scharfem Cutoff. Im Idealfall sollten die beiden Kurven aufeinander liegen.

Im Folgenden wird zunächst ein analytischer Ausdruck der spektralen Dichte in Abhängigkeit der Resonatorenparameter Güte, Kopplung und Frequenz bestimmt. Anschließend wird ein numerischer Fit durchgeführt, um diese bestmöglich an die gewünschte Kurve anzupassen. Im Folgenden wird als ideale Kurve eine subohmsche spektrale Dichte verwendet, da diese von besonderem Interesse bei der Quantenemulation ist. Denn wie eingangs angemerkt wurde, kann das Spin-Boson Modell im Fall sehr starker Kopplung in Verbindung mit einem subohmschen Bad in einer klassischen Simulation nicht effizient gelöst werden bzw. bieten die erzielten Ergebnisse weiterhin Anlass zur Diskussion [WDLZ13].

Die Wechselwirkung zwischen der Umgebung und dem System im Spin-Boson Modell

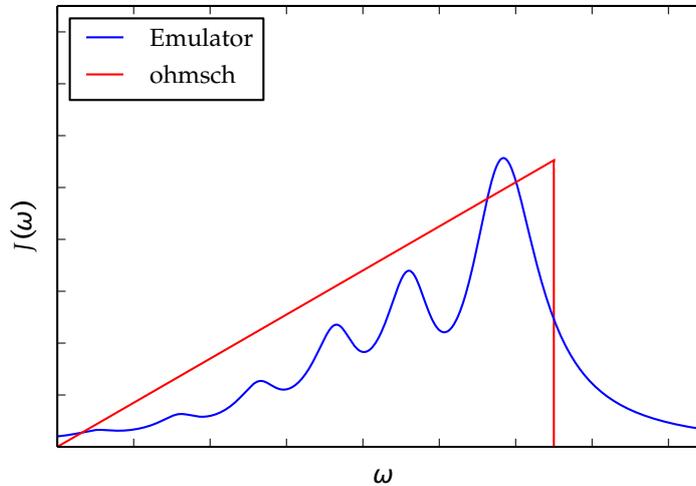


Abbildung 4.1.: Die spektrale Dichte des bosonischen Bades (rot) soll durch die der Resonatoren (blau) approximiert werden.

wird vollständig durch die spektrale Dichte charakterisiert. Zur Emulation wird also ein beliebiges bosonisches System mit der gewünschten spektralen Dichte benötigt. Im Folgenden werden zwei verschiedene Varianten von Resonatorschaltungen mit den entsprechenden Vor- und Nachteilen vorgestellt.

4.1. Ein zentraler Resonator und N Hilfsresonatoren

In Abbildung 4.2 ist das Konzept des Quantenemulators ohne die Ausleseeinheit und die Feedline (Abbildung 2.2) dargestellt. Die Besonderheit des hier durch Resonatoren realisierten bosonischen Bades ist die Anordnung auf einem separaten Chip (hellblau unterlegte Fläche). Dadurch ist es möglich, beliebige spektrale Dichten auf verschiedenen Chips zu implementieren und diese nach Bedarf an den Bandpass anzuschließen. Somit können mit einem einzigen Qubit Messreihen unter dem Einfluss verschiedener spektraler Dichten durchgeführt werden. Des Weiteren kann die Temperatur des Chips

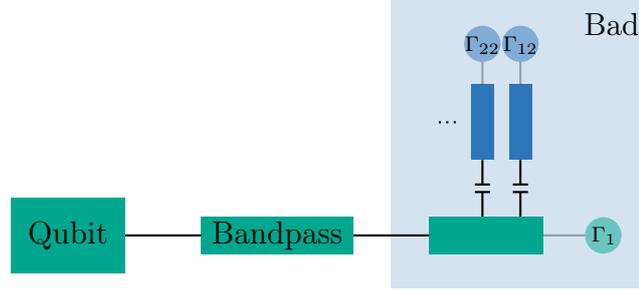


Abbildung 4.2.: Bosonisches Bad bestehend aus einem zentralen Resonator (grün) und N Hilfsresonatoren (blau). Die transparenten Kreise sind nur Bestandteil des mathematischen Modells realer Resonatoren.

unabhängig vom System (Qubit) eingestellt werden, was bei der Realisierung des Quantenemulators auf einem einzigen Chip kaum möglich ist.

Die spektrale Dichte des bosonischen Bades des Spin-Boson Modells entspricht der des sogenannten zentralen Resonators, der dadurch gekennzeichnet ist, dass er direkt an den Bandpass gekoppelt wird. Dessen spektrale Dichte wird durch weitere N Resonatoren modifiziert, die kapazitiv an den zentralen Resonator koppeln. Letztere werden im Folgenden als Hilfsresonatoren bezeichnet. Die spektrale Dichte realer Resonatoren weist eine natürliche Verbreiterung auf. Sowohl der zentrale Resonator als auch die N Hilfsresonatoren werden jedoch mathematisch jeweils durch eine diskrete Mode beschrieben. Der farbige Kreis, mit dem jeder Resonator versehen ist, markiert ein zusätzliches Reservoir, durch welches die natürliche Verbreiterung der Mode mathematisch modelliert wird. In Abbildung 4.2 ist die vorgeschlagene Modellierung des bosonischen Bades des Spin-Boson Modells zu sehen, dessen spektrale Dichte im Folgenden bestimmt werden soll. Hierzu wird der Hamiltonoperator des gezeigten Aufbaus benötigt, um die Bewegungsgleichungen der Badkorrelatoren zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 H = & \omega_{res} a^\dagger a + \sum_n \omega_n \tilde{a}_n^\dagger \tilde{a}_n + \sum_m t_m (\tilde{a}_m + \tilde{a}_m^\dagger) (a + a^\dagger) + \sum_j \bar{\omega}_j b_j^\dagger b_j \\
 & + \sum_j \sum_n \omega_j^n \tilde{b}_{jn}^\dagger \tilde{b}_{jn} + \sum_j \sum_n \tilde{t}_{nj} (b_j + b_j^\dagger) (\tilde{b}_{nj} + \tilde{b}_{nj}^\dagger) + \sum_j f_j (b_j + b_j^\dagger) (a + a^\dagger)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die ersten beiden Terme des Hamiltonoperators beschreiben den idealen zentralen Resonator und dessen Verbreiterungsreservoir. Der dritte Term bestimmt die Kopplung der beiden. Diese drei Terme beschreiben somit einen realen Resonator. Die folgenden drei Terme bezeichnen die Hilfsresonatoren und deren Verbreiterungsreservoirs sowie die Kopplung ebendieser. Der letzte Term beschreibt die Kopplung zwischen dem zentralen Resonator und den N Hilfsresonatoren.

Die spektrale Dichte dieses Systems wird folgendermaßen bestimmt

$$J(\omega) = -\chi \cdot \text{Im} \{ \mathcal{F}(-i \langle q(t)q(0) \rangle_R \Theta(t))(\omega) \} \quad , \quad (4.2)$$

wobei der Badoperator durch $q(t) = \bar{t} (a(t) + a^\dagger(t))$ gegeben ist. \bar{t} bezeichnet die Kopplungskonstante des Qubit und des zentralen Resonators.

Zunächst müssen also die Korrelatoren der folgenden Gleichung berechnet werden, aus denen dann zusammen die spektrale Dichte bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} \langle q(t)q(0) \rangle_R \Theta(t) = & (\langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R + \langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R \\ & + \langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R + \langle a(t)a(0) \rangle_R) \Theta(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1.1. Berechnung der Korrelatoren $\langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R$ und $\langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R$

Es zeigt sich, dass $\langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R$ und $\langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R$ (analog $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R$ und $\langle a(t)a(0) \rangle_R$) jeweils voneinander abhängen und somit gleichzeitig bestimmt werden können.

Die Summe der folgenden beiden Korrelatoren soll nun berechnet werden:

$$G(t) = -i \langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \quad \tilde{G}(t) = -i \langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) . \quad (4.4)$$

Die nachfolgenden sechs Greensfunktionen dienen nur als Hilfsmittel zur Berechnung von

$G(t)$ und $\tilde{G}(t)$, da deren Bewegungsgleichungen von diesen Korrelatoren abhängen.

$$\begin{aligned}
 F_k(t) &= -i \langle b_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) & \tilde{F}_k(t) &= -i \langle b_k^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \\
 L_k(t) &= -i \langle \tilde{a}_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) & \tilde{L}_k(t) &= -i \langle \tilde{a}_k(t)^\dagger a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \\
 P_{kn}(t) &= -i \langle \tilde{b}_{kn}(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) & \tilde{P}_{kn}(t) &= -i \langle \tilde{b}_{kn}^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen aller Greensfunktionen im Zeitraum bestimmt, danach werden diese fouriertransformiert. Somit werden die Differentialgleichungen in ein lineares Gleichungssystem überführt, welches dann gelöst werden kann.

4.1.2. Bewegungsgleichungen im Zeitraum

Im Folgenden sind die acht Bewegungsgleichungen der Greensfunktionen im Zeitraum angegeben, die zur Bestimmung der spektralen Dichte benötigt werden.

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} G(t) &= \omega_{res} G(t) + \sum_m t_m \left(L_m(t) + \tilde{L}_m(t) \right) \\
 &\quad + \sum_n f_n \left(F_n(t) + \tilde{F}_n(t) \right) + \delta(t) (1 + n_0)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) = \bar{\omega}_k F_k(t) + \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(t) + \tilde{P}_{kn}(t) \right) + f_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \tag{4.7}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} L_k(t) = \omega^k L_k(t) + t_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \tag{4.8}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} P_{kn}(t) = \omega_n^k P_{kn}(t) + \tilde{t}_{kn} \left(F_k(t) + \tilde{F}_k(t) \right) \tag{4.9}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(t) = -\omega_{res} \tilde{G}(t) - \sum_m t_m \left(L_m(t) + \tilde{L}_m(t) \right) - \sum_n f_n \left(F_n(t) + \tilde{F}_n(t) \right) \quad (4.10)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_k(t) = -\bar{\omega}_k \tilde{F}_k(t) - \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(t) + \tilde{P}_{kn}(t) \right) - f_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \quad (4.11)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}_k(t) = -\omega^k \tilde{L}_k(t) - t_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \quad (4.12)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}_{kn}(t) = -\omega_n^k \tilde{P}_{kn}(t) - \tilde{t}_{kn} \left(F_k(t) + \tilde{F}_k(t) \right) \quad (4.13)$$

Die expliziten Rechnungen sind im Anhang B zu finden.

4.1.3. Bewegungsgleichungen im Frequenzraum

Wird auf die Differentialgleichungen aus Abschnitt 4.1.2 die Fouriertransformation angewendet, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in Abhängigkeit von L_k , \tilde{L}_k , F_k , \tilde{F}_k , P_{kn} , \tilde{P}_{kn} , G und \tilde{G} . Die Greensfunktionen können dann explizit angegeben werden. Sie werden durch die Systemparameter, in diesem Fall die Frequenz und Güte der Resonatoren, eindeutig bestimmt.

Folgende Konvention der Fouriertransformation wird verwendet:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} e^{\eta t} f(\omega) \quad (4.14)$$

Vorsichtshalber wurde der konvergenzerzeugende Faktor $e^{\eta t}$ hinzugefügt, um mögliche Pole der Greensfunktionen zu heben. Im Folgenden wird er nicht explizit vermerkt, bei Bedarf kann er einfach hinzugefügt werden.

Für die linken Seiten der Differentialgleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} f(t) &= i \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} e^{\eta t} f(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} e^{\eta t} (\omega + i\eta) f(\omega). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Auf den rechten Seiten werden ebenfalls die Fouriertransformierten eingesetzt und dann ein Integrandenvergleich durchgeführt.

Die Fouriertransformierte der Gleichung (4.6) lautet:

$$(\omega - \omega_{res}) G(\omega) = \sum_m t_m \left(L_m(\omega) + \tilde{L}_m(\omega) \right) + \sum_n f_n \left(F_n(\omega) + \tilde{F}_n(\omega) \right) + 1 + n_0. \quad (4.16)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.7):

$$(\omega - \bar{\omega}_k) F_k(\omega) = \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(\omega) + \tilde{P}_{kn}(\omega) \right) + f_k \left(G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right). \quad (4.17)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.8):

$$(\omega - \omega^k + i\eta) L_k(\omega) = t_k \left(G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right). \quad (4.18)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.9):

$$(\omega - \omega_n^k + i\tilde{\eta}) P_{kn}(\omega) = \tilde{t}_{kn} \left(F_k(\omega) + \tilde{F}_k(\omega) \right). \quad (4.19)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.10):

$$(\omega + \omega_{res}) \tilde{G}(\omega) = - \sum_m t_m \left(L_m(\omega) + \tilde{L}_m(\omega) \right) - \sum_n f_n \left(F_n(\omega) + \tilde{F}_n(\omega) \right). \quad (4.20)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.11):

$$(\omega + \bar{\omega}_k) \tilde{F}_k(\omega) = - \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(\omega) + \tilde{P}_{kn}(\omega) \right) - f_k \left(G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right). \quad (4.21)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.12):

$$(\omega + \omega^k + i\eta) \tilde{L}_k(\omega) = -t_k \left(G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right). \quad (4.22)$$

Fouriertransformierte der Gleichung (4.13):

$$(\omega + \omega_n^k + i\tilde{\eta}) \tilde{P}_{kn}(\omega) = -\tilde{t}_{kn} \left(F_k(\omega) + \tilde{F}_k(\omega) \right). \quad (4.23)$$

4.1.4. Lösung im Frequenzraum

Im Folgenden wird das Gleichungssystem im Frequenzraum gelöst. Dabei wurde die thermische Besetzung $n_0 = 0$ gewählt.

1. Addition der Gleichungen (4.18) und (4.22)

$$\tilde{L}_k(\omega) = -\frac{\omega - \omega^k}{\omega + \omega^k} L_k(\omega) \quad (4.24)$$

2. Addition der Gleichungen (4.16) und (4.20)

$$\tilde{G}(\omega) = \{1 - (\omega - \omega_{res}) G(\omega)\} \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \quad (4.25)$$

G und \tilde{G} unterscheiden sich strukturell durch ein Vorzeichen und eine Konstante auf der rechten Seite, wohingegen sich die rechten Seiten von L_k und \tilde{L}_k nur durch ein Vorzeichen unterscheiden.

3. Bestimmung von $G + \tilde{G}$ (unter Verwendung von Gleichung (4.25))

$$G(\omega) + \tilde{G}(\omega) = \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right\} G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \quad (4.26)$$

4. Lösung von Gleichung (4.18) in Abhängigkeit von G (unter Verwendung von Gleichung (4.26))

$$L_k(\omega) = \frac{t_k}{\omega - \omega^k} \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \quad (4.27)$$

5. Lösung von $L_k + \tilde{L}_k$ in Abhängigkeit von G (unter Verwendung von Gleichung (4.27))

$$\begin{aligned} L_k(\omega) + \tilde{L}_k(\omega) &= \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega^k}{\omega + \omega^k} \right\} L_k(\omega) \\ &= t_k \left\{ \frac{1}{\omega - \omega^k} - \frac{1}{\omega + \omega^k} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dieser Term kommt in Gleichung (4.16) vor. Er hängt jetzt nur noch von G ab und kann somit direkt in die Gleichung eingesetzt werden.

6. Addition der Gleichungen (4.19) und (4.23)

$$\tilde{P}_{kn}(\omega) = -\frac{\omega - \omega_n^k}{\omega + \omega_n^k} P_{kn}(\omega) \quad (4.29)$$

7. Addition der Gleichungen (4.17) und (4.21)

$$\tilde{F}_k(\omega) = -\frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} F_k(\omega) \quad (4.30)$$

8. Bestimmung von $F_k + \tilde{F}_k$

$$F_k(\omega) + \tilde{F}_k(\omega) = \left\{ 1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right\} F_k(\omega) \quad (4.31)$$

9. Lösung von P_{kn} in Abhängigkeit von F (unter Verwendung von Gleichung (4.31))

$$P_{kn}(\omega) = \frac{\tilde{t}_{kn}}{\omega - \omega_n^k} \left\{ 1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right\} F_k(\omega) \quad (4.32)$$

10. Lösung von $P_{kn} + \tilde{P}_{kn}$ in Abhängigkeit von F (unter Verwendung von Gleichung (4.32))

$$\begin{aligned} P_{kn}(\omega) + \tilde{P}_{kn}(\omega) &= \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_n^k}{\omega + \omega_n^k} \right\} P_{kn}(\omega) \\ &= \tilde{t}_{kn} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_n^k} - \frac{1}{\omega + \omega_n^k} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right\} F_k(\omega) \end{aligned} \quad (4.33)$$

11. Lösung von Gleichung (4.17)

$$\begin{aligned} (\omega - \bar{\omega}_k) F_k(\omega) &= \sum_n \tilde{t}_{nk}^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_n^k} - \frac{1}{\omega + \omega_n^k} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right\} F_k(\omega) \\ &\quad + f_k \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{\left\{ (\omega - \bar{\omega}_k) - \sum_n \tilde{t}_{nk}^2 \left(\frac{1}{\omega - \omega_n^k} - \frac{1}{\omega + \omega_n^k} \right) \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right) \right\}}^{=\lambda_k} F_k(\omega) \\ &= f_k \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$F_k(\omega) = \frac{f_k}{\lambda_k} \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \quad (4.36)$$

12. Gleichung (4.31) in Gleichung (4.36) einsetzen

$$F_k(\omega) + \tilde{F}_k(\omega) = \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_k}{\omega + \bar{\omega}_k} \right) \cdot \frac{f_k}{\lambda_k} \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} \quad (4.37)$$

Dieser Term kommt in Gleichung (4.16) vor, er wurde jetzt allein durch G ausgedrückt und kann somit direkt eingesetzt werden. Die aus (4.16) resultierende Gleichung hängt somit nur noch von G ab.

13. Gleichungen (4.28) und (4.37) in Gleichung (4.16) einsetzen

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{res}} \left\{ \sum_m t_m^2 \left(\frac{1}{\omega - \omega^m} - \frac{1}{\omega + \omega^m} \right) + \sum_n \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\omega + \bar{\omega}_n} \right) \cdot \frac{f_n^2}{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right) G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \right\} + \frac{1}{\omega - \omega_{res}} \quad (4.38)$$

4.1.5. Kontinuumslimites – Approximation der Reservoirs

Die Verbreiterung der Moden der Resonatoren wurde mithilfe weiterer Reservoirs realisiert, die in Abbildung 4.2 durch die farbigen Kreise repräsentiert werden.

Jeder Resonator wird hierbei an ein zusätzliches Reservoir aus harmonischen Oszillatoren gekoppelt, \tilde{a}^\dagger , \tilde{a} sowie \tilde{b}^\dagger , \tilde{b} sind deren Erzeuger und Vernichter. Diese zusätzlichen Reservoirs werden nun durch ein kontinuierliches Spektrum approximiert. Im Allgemeinen wird der Kontinuumslimites bei Termen der Form

$$\Sigma_R(\omega) = \sum_\nu \frac{|t_\nu|^2}{\omega - \xi_\nu + i\eta} \quad (4.39)$$

folgendermaßen durchgeführt ([BF04]), wobei $\xi_\nu = \epsilon_{nu} - \mu$ gilt.

Unter der Annahme, dass Σ_R nur von der Länge von k abhängt, d. h. also von ϵ_k , kann Σ_R durch Einführen der Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\Sigma_R(\omega) &= \int d\epsilon \rho(\epsilon) \frac{|t(\epsilon)|^2}{\omega - \epsilon + \mu + i\eta} \\ &= \mathcal{P} \int d\epsilon \rho(\epsilon) \frac{|t(\epsilon)|^2}{\omega - \epsilon + \mu} - i\pi \rho(\omega + \mu) |t(\omega + \mu)|^2,\end{aligned}\quad (4.40)$$

wobei \mathcal{P} den Hauptwert des nachfolgenden Integrals beschreibt. Hierbei sind $|t(\epsilon)|^2$ und $\rho(\epsilon)$ abhängig von den Eigenschaften der Resonatoren der zusätzlichen Reservoirs. Sie charakterisieren die Güte eines Resonators.

Im Folgenden wird nun angenommen, dass $|t(\epsilon)|^2 \cdot \rho(\epsilon)$ in einem ausreichend großen Energieintervall $-D < \epsilon < D$ konstant ist.

$$2\pi |t(\epsilon)|^2 \cdot \rho(\epsilon) = \begin{cases} 2\Gamma, & -D < \epsilon < D \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\quad (4.41)$$

Diese Approximation ist nur so lange gültig wie die Breite der Greensfunktion, deren Selbstenergie durch Σ_R gegeben ist, klein ist gegen die Skala, auf der $|t(\epsilon)|^2 \cdot \rho(\epsilon)$ variiert. Diese Skala ist durch D gegeben.

Um ein von der Wahl des Cutoff D unabhängiges Ergebnis zu erhalten, wird D groß gewählt. Für $\omega + \mu \in [-D, D]$ ist die approximierte Lösung von Gleichung (4.40) gegeben durch

$$\begin{aligned}\Sigma_R(\omega) &\approx \frac{\Gamma}{\pi} \mathcal{P} \int_{-D}^D d\epsilon \frac{1}{\omega - \epsilon + \mu} - i\Gamma \\ &= -\frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\underbrace{\left| \frac{D + \omega + \mu}{D - \omega - \mu} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ für } D \rightarrow \infty} \right) - i\Gamma \\ &\approx -i\Gamma.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Approximation von Gleichung (4.38)

Analog zu dieser Rechnung kann gezeigt werden, dass die folgenden Approximationen gültig sind.

Für das Verbreiterungsreservoir des zentralen Resonators gilt

$$\sum_m |t_m|^2 \left(\frac{1}{\omega - \omega^m + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega^m} \right) \approx -i\Gamma_1. \quad (4.43)$$

Da die Kopplungen t_m in der Größenordnung $1/10 \cdot \omega^m$ liegen, ist $|t_m|^2/\omega + \omega^m$ im Vergleich zu dem ersten Term mit $\omega - \omega^m$ vernachlässigbar.

Gleiches gilt für die Reservoirs der Hilfsresonatoren, die ebenfalls durch konstante spektrale Dichten approximiert werden:

$$\sum_n |\tilde{t}_{nk}|^2 \left(\frac{1}{\omega - \omega_n^k + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_n^k} \right) \approx -i\Gamma_{k,2}. \quad (4.44)$$

Damit ergibt sich nach Einführung der kontinuierlichen spektralen Dichten der Verbreiterungsreservoirs für Gleichung (4.38) folgendes Ergebnis:

$$G(\omega) = \frac{-i\Gamma_1 + \sum_n \frac{f_n^2 \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\omega + \bar{\omega}_n}\right)}{\omega - \bar{\omega}_n + i\Gamma_{n,2} \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\omega + \bar{\omega}_n}\right)} + \omega + \omega_{res}}{\omega^2 - \omega_{res}^2 - 2\omega_{res} \left\{ -i\Gamma_1 + \sum_n \frac{f_n^2 \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\omega + \bar{\omega}_n}\right)}{\omega - \bar{\omega}_n + i\Gamma_{n,2} \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\omega + \bar{\omega}_n}\right)} + \omega + \omega_{res} \right\}}. \quad (4.45)$$

4.1.6. Spektrale Dichte

Die spektrale Dichte setzt sich aus nur zwei Korrelatoren zusammen, sofern die thermische Besetzung n_0 des zentralen Resonators zum Zeitpunkt $t = 0$ Null ist. Denn die

anderen beiden Terme in Gleichung (4.3) tragen somit nicht bei (siehe Anhang B.2).

$$\langle q(t)q(0) \rangle_R \Theta(t) = \underbrace{\langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t)}_{\propto G(\omega)} + \underbrace{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t)}_{\propto \tilde{G}(\omega)} \quad (4.46)$$

Folglich kann die spektrale Dichte mithilfe von Gleichung (4.26) bestimmt werden. Es gilt also

$$G(\omega) + \tilde{G}(\omega) = \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}} \right\} G(\omega) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}}, \quad (4.47)$$

wobei G durch die in Gleichung (4.45) approximierte Greensfunktion gegeben ist. Damit kann nun die spektrale Dichte explizit berechnet werden:

$$J(\omega) = -\chi \cdot \text{Im} \left\{ G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right\}. \quad (4.48)$$

4.1.7. Numerischer Fit

In Gleichung (4.48) ist ein analytischer Ausdruck der spektralen Dichte des Aufbaus bestehend aus einem zentralen Resonator und N Hilfsresonatoren gegeben. Die zugrundeliegende Idee ist, dass diese das bosonische Bad des Quantenemulators für das Spin-Boson Modell abbilden soll.

Hierzu wird im Folgenden ein subohmsches Bad mit Lorentz-Cutoff betrachtet. Dieses ist in der nachfolgenden Gleichung beschrieben.

$$J_{ideal}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < 0 \\ \eta \sqrt{\omega} \frac{1}{1+(\omega/\omega_{max})^2} & \omega > 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Im Quantenemulator soll diese spektrale Dichte für ein vorgegebenes η und ω_{max} emuliert werden.

Demzufolge wird die spektrale Dichte in Gleichung (4.48) an diejenige in Gleichung (4.49)

mithilfe eines numerischen Fits unter Verwendung der Funktion `scipy.optimize.curve_fit` angepasst.

Die Parameter, die die spektrale Dichte im Quantenemulator bestimmen, sind die Kopplungen f_k zwischen dem zentralen Resonator und den N Hilfsresonatoren sowie die Frequenzen $\bar{\omega}_k$ und Güten $\Gamma_{k,2}$ der Hilfsresonatoren. Die Frequenz ω_{res} und die Güte Γ_1 des zentralen Resonators und der Vorfaktor der spektralen Dichte χ in Gleichung (4.48) werden vor dem Fit festgelegt. Dennoch beträgt die Anzahl der Fitparameter bei N Hilfsresonatoren $3 \cdot N$. Im Folgenden wird $N = 35$ gewählt, es ergäben sich also 105 Fitparameter.

Um die Anzahl an Freiheitsgraden zu reduzieren, wurden die nachfolgenden Parametrisierungen eingeführt:

$$f_k = |\beta - \gamma\sqrt{k}|, \quad \bar{\omega}_k = |\tilde{\epsilon} + \alpha\sqrt{k}|, \quad \Gamma_{k,2} = |\delta\sqrt{k}| + 0.001, \quad (4.50)$$

dabei gilt ($k \in \{1, \dots, N\}$). Die Fitparameter sind hierbei α , β , γ , δ und $\tilde{\epsilon}$, deren Anzahl ist unabhängig von der Anzahl der Hilfsresonatoren. Durch die Beträge wird gewährleistet, dass keine unphysikalischen, negativen Kopplungen, Frequenzen und Güten auftreten.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 ist das Resultat eines numerischen Fits mit 35 Hilfsresonatoren dargestellt. Die rote Kurve entspricht der subohmschen spektralen Dichte

$$J_{ideal} = 0.9\sqrt{3} \frac{(\omega - \omega_d)}{\epsilon} \cdot \frac{1}{(1 + (\omega - \omega_d/\epsilon\omega_{max})^2)}, \quad (4.51)$$

wobei ω_d und ϵ eingeführt wurden, um die x-Achse dimensionslos zu machen. Ihr Wert beträgt in diesem Fall jeweils 5 GHz, der Cutoff ist durch $\omega_{max} = 1$ GHz gegeben.

Die Parameter des zentralen Resonators wurden vor dem Fit festgelegt. Seine Energie beträgt $\omega_{res} = 5.5$ GHz und seine Güte $\Gamma_1 = 0.01$ GHz. Ebenso wurde der Vorfaktor der spektralen Dichte mit $\chi = 3$ angegeben. Das Fitintervall ($(\omega - \omega_d)/\epsilon \in \{-0.008, \dots, 0.1\}$) beschreibt einen Bereich, in dem $J_{ideal} = 0$ ist, und reicht knapp bis zum Maximum der

spektralen Dichte.

Die Fitparameter sind durch $\alpha = -7.0069$ GHz, $\beta = 0.6002$ GHz, $\gamma = 5.7406$ GHz, $\delta = 1278.1654$ GHz und $\tilde{\epsilon} = 4.9592$ GHz gegeben. Die daraus resultierenden Güten, Frequenzen und Kopplungen der Hilfsresonatoren sind in Tabelle C.1 im Anhang C aufgeführt.

Es wird deutlich, dass die spektrale Dichte, die durch das Bad im Quantenemulator erzeugt wird (blaue Kurve), die ideale spektrale Dichte (rote Kurve) sehr gut wiedergibt. Bei der Betrachtung eines größeren Frequenzbereichs, wie er in Abbildung 4.4 gezeigt ist, tritt im Bereich negativer Frequenzen jedoch ein weiterer Peak auf, der in der idealen spektralen Dichte nicht vorkommt. Dieses Problem kann im Experiment mithilfe eines Bandpasses gelöst werden.

Ein idealer Bandpass wird durch eine Funktion beschrieben, die nur in dem Frequenzbereich, in dem der Bandpass durchlässig sein soll, ungleich Null ist. Dies entspricht der roten Kurve in Abbildung 4.5. Er kann beispielsweise durch eine Parallelschaltung von Resonatoren realisiert werden. Deren Spektrum ist als blaue Kurve in Abbildung 4.5 zu sehen.

Die Multiplikation der spektralen Dichte des Bandpasses und der des Bades filtert die unerwünschten Teile des Spektrums in Abbildung 4.4 heraus.

Bei der Betrachtung der in Tabelle C.1 im Anhang C aufgeführten Werte für die Güten, Frequenzen und Kopplungen der Hilfsresonatoren wird schnell klar, dass trotz der guten Ergebnisse das Bad nicht experimentell realisiert werden kann, da solch große Kopplungen nicht umgesetzt werden können.

Jedoch zeigt das Ergebnis des numerischen Fits ein Artefakt, das einen Hinweis auf die Fano-Resonanz liefert [Fan61]. Bei der Fano-Resonanz werden zwei Resonatoren ähnlicher Frequenz, jedoch stark unterschiedlicher Güte, gekoppelt, wodurch es zu einem lokalen Abfall in der spektralen Dichte kommt. In Abbildung 4.4 ist ein ähnliches Verhalten im Bereich $(\omega - \omega_d)/\epsilon \in \{-0.05, \dots, 0.05\}$ zu beobachten. In diesem Bereich lässt sich ein wurzelförmiger Verlauf der spektralen Dichte feststellen.

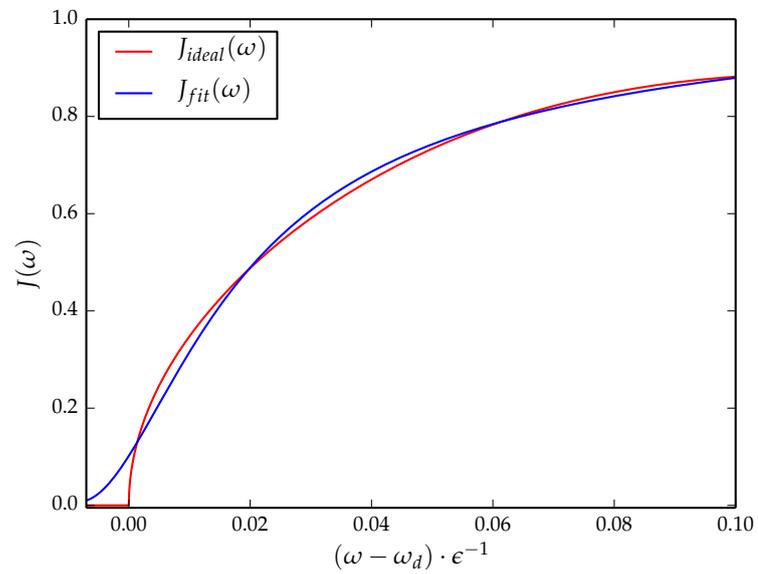


Abbildung 4.3.: Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und 35 Hilfsresonatoren.

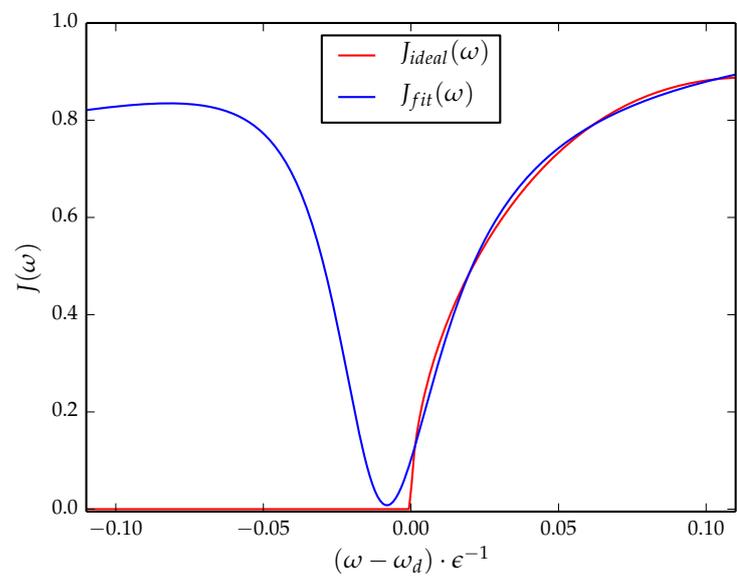


Abbildung 4.4.: Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und 35 Hilfsresonatoren.

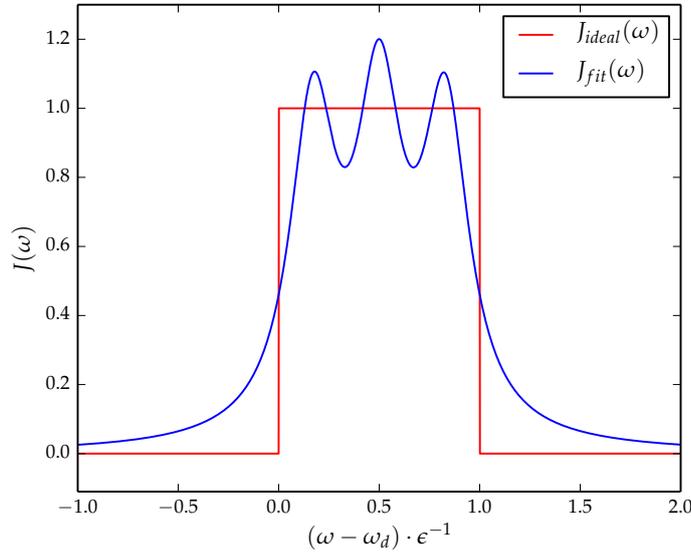


Abbildung 4.5.: Numerischer Fit; Bandpass (drei parallel angeordneten Resonatoren).

4.1.8. Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator

Im Folgenden wird die spektrale Dichte eines zentralen Resonators gekoppelt an nur einen Hilfsresonator betrachtet. In diesem Fall werden realisierbare Parameter für die Resonatoren angenommen. Die Kopplung der beiden Resonatoren beträgt $f = 0.5$ GHz, die Frequenzen $\omega_{res} = 4.96$ GHz und $\bar{\omega} = 4.9$ GHz, die Güten $\Gamma_1 = 2$ GHz und $\Gamma_2 = 0.001$ GHz und der Vorfaktor der spektralen Dichte $\chi = 0.1$. Die Voraussetzungen dafür, dass sich eine der Fano-Resonanz ähnelnde spektrale Dichte ergibt, sind somit erfüllt. An die spektrale Dichte der Resonatoren wird nun eine subohmsche Kurve gefittet.

$$J_{ideal}(\omega) = \bar{\alpha} \left(\frac{\omega - \omega_d}{\omega_d} \right)^{0.8} \cdot \frac{1}{1 + (\omega - \omega_d / \omega_d \omega_{max})^2} \quad (4.52)$$

Die Fitparameter sind $\bar{\alpha}$, ω_d und ω_{max} . Das Resultat des numerischen Fits ist in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt. Die spektrale Dichte der beiden Resonatoren wird

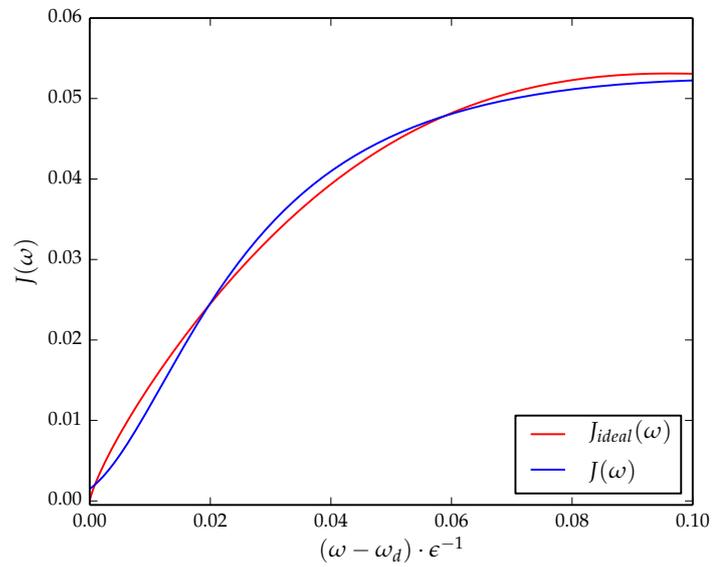


Abbildung 4.6.: Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.8$.

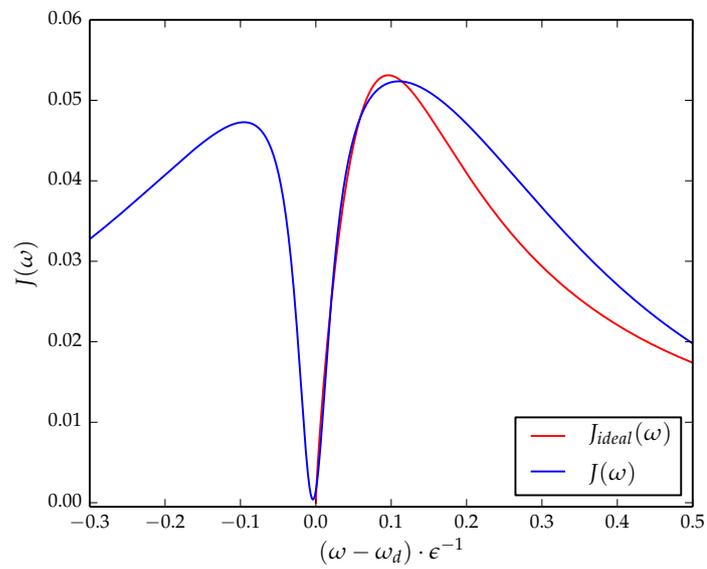


Abbildung 4.7.: Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.8$.

sehr gut durch ein subohmsches Bad mit den nachfolgenden Parametern beschrieben:

$$\bar{\alpha} = 0.1612 \text{ GHz}, \quad \omega_d = 4.9190 \text{ GHz}, \quad \omega_{max} = 0.5791 \text{ GHz}. \quad (4.53)$$

Mithilfe eines zentralen Resonators gekoppelt an einen Hilfsresonator kann somit eine subohmsche spektrale Dichte im Quantenemulator experimentell realisiert werden, sofern diese ähnliche Frequenzen und sehr unterschiedliche Güten aufweisen.

Die Abbildung 4.7 macht deutlich, dass auch in diesem Fall der Chip mittels eines Bandpasses an das Qubit gekoppelt werden sollte, um den Bereich negativer Frequenzen der spektralen Dichte zu Null zu setzen.

Ein weiteres Beispiel einer subohmschen spektralen Dichte kann mithilfe der folgenden Parameter umgesetzt werden. Es wird dabei nur die Frequenz und Güte des zentralen Resonators zu $\omega_{res} = 4.95 \text{ GHz}$ und $\Gamma_1 = 2.1 \text{ GHz}$ verändert. Die Voraussetzungen dafür, dass sich eine der Fano-Resonanz ähnelnde spektrale Dichte ergibt, sind folglich weiterhin erfüllt. Die spektrale Dichte der Resonatoren wird nun unter Verwendung eines numerischen Fits durch eine stark subohmsche Kurve der nachfolgenden Form approximiert.

$$J_{ideal}(\omega) = \bar{\alpha} \left(\frac{\omega - \omega_d}{\omega_d} \right)^{0.45} \cdot \frac{1}{1 + (\omega - \omega_d / \omega_d \omega_{max})^2} \quad (4.54)$$

Die Fitparameter sind wiederum durch $\bar{\alpha}$, ω_d und ω_{max} gegeben. Das Resultat des numerischen Fits ist in den Abbildungen 4.8 und 4.9 dargestellt, wobei die Parameter der Fitfunktion durch

$$\bar{\alpha} = 0.0893 \text{ GHz}, \quad \omega_d = 4.9274 \text{ GHz}, \quad \omega_{max} = 0.9695 \text{ GHz} \quad (4.55)$$

bestimmt sind. Es wird deutlich, dass die Kurven in diesem Fall weniger gut zusammenpassen als im vorherigen Fall, allerdings ist die Approximation der roten durch die blaue Kurve immer noch zufriedenstellend. Insbesondere im Bereich des Maximums wird der Verlauf sogar besser wiedergegeben.

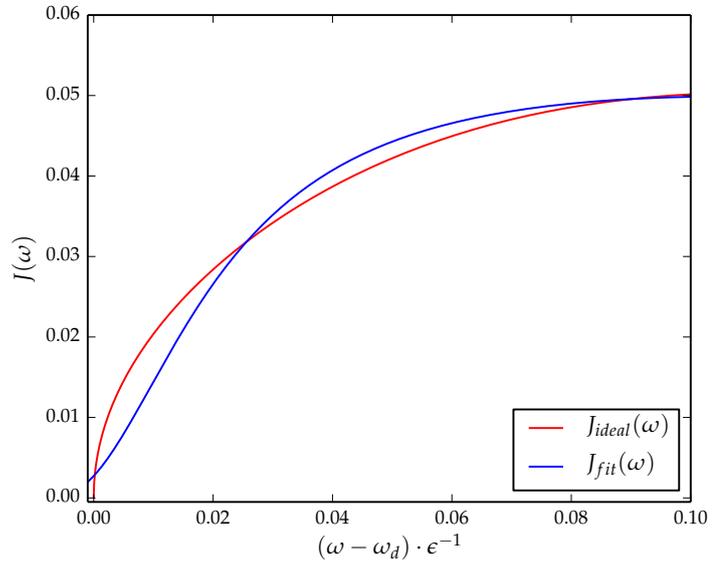


Abbildung 4.8.: Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.45$.

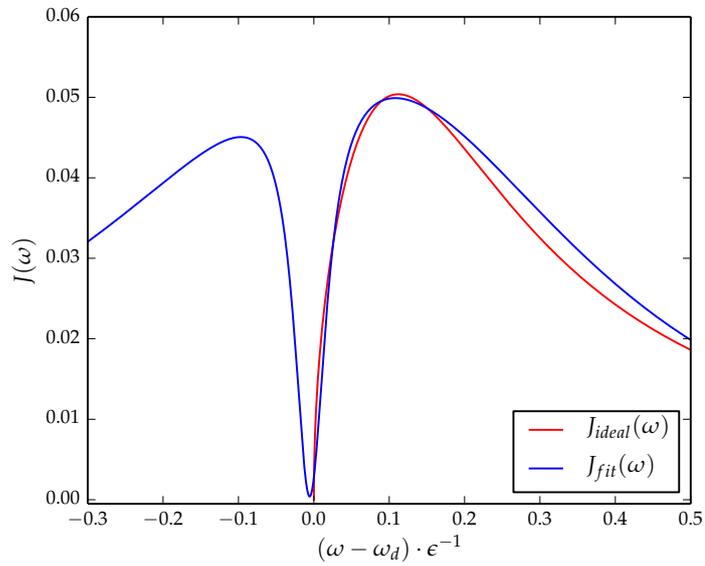


Abbildung 4.9.: Ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.45$.

Es wurde somit gezeigt, dass verschiedene spektrale Dichten, in diesem Fall eine schwach und eine stark subohmsche spektrale Dichte, unter Verwendung unterschiedlicher Resonatoren auf dem Chip implementiert werden können.

4.2. Asymmetrie des exakten Resonatorspektrums

Ein anderer Ansatz zur Realisierung insbesondere der subohmschen spektralen Dichte wird in [MRE⁺12] gewählt. Hierbei werden N Resonatoren direkt an das Qubit gekoppelt. Deren spektrale Dichte wird durch eine Summe aus Lorentzpeaks beschrieben. Allerdings können aufgrund der geringen Abmessungen des Qubits im Experiment nur ungefähr bis zu zehn Resonatoren direkt ans Qubit angebracht werden. Zudem ist es anschließend nicht möglich, im gleichen Aufbau andere spektrale Dichten zu realisieren, wohingegen bei dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Konzept durch die Implementierung des Bades auf einem separaten Chip eine Vielzahl an unterschiedlichen spektralen Dichten untersucht werden können, indem mehrere Chips gefertigt werden.

Ein weiterer Nachteil des Ansatzes aus [MRE⁺12] ist, dass die Approximation der spektralen Dichte durch eine Summe aus Lorentzpeaks nur im Fall hoher Güten gültig ist. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Im Allgemeinen wird die Kopplung zweier Resonatoren durch eine Multiplikation ihrer Auslenkungen beschrieben, also $t_m (\tilde{a}_m + \tilde{a}_m^\dagger) (a + a^\dagger)$, wobei t_m der Kopplung und \tilde{a}_m , \tilde{a}_m^\dagger , a und a^\dagger den Erzeugern und Vernichtern der jeweiligen Resonatormode entsprechen. Häufig wird dieser Kopplungsterm jedoch durch $t_m (a\tilde{a}_m^\dagger + a^\dagger\tilde{a}_m)$ approximiert. Dies hat Auswirkungen auf die spektrale Dichte eines Resonators, da die Verbreiterung der Resonatormode durch die Kopplung an ein zusätzliches Reservoir, bestehend aus einer Vielzahl an Resonatoren, modelliert wird.

Die Greensfunktion, die im Falle des vollen Kopplungsterms ermittelt wurde, wird im Folgenden mit $G_\Sigma(\omega)$ bezeichnet. Die Gleichung kann Abschnitt 4.1.5 entnommen werden, wobei alle $f_i = 0$ gesetzt wurden. Dadurch lässt sich die spektrale Dichte eines

einzelnen Resonators mit der Frequenz ω_{res} bestimmen.

$$G_{\Sigma}(\omega) := G(\omega) + \tilde{G}(\omega) = \frac{\omega + \omega_{res} - i\Gamma_1}{\omega^2 - \omega_{res}^2 + i2\Gamma_1\omega_{res}} \cdot \left(1 - \frac{\omega - \omega_{res}}{\omega + \omega_{res}}\right) + \frac{1}{\omega + \omega_{res}} \quad (4.56)$$

Die Greensfunktion $G_a(\omega)$ zeigt an, dass der approximierte Kopplungsterm verwendet wurde. Diese Rechnung wurde analog zu derjenigen im Abschnitt 4.1 durchgeführt, wobei anschließend alle $f_i = 0$ gewählt wurden. Es gilt

$$G_a(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{res} + i\Gamma_1}, \quad (4.57)$$

wobei ω_{res} die Frequenz des zentralen Resonators ist und Γ_1 dessen Verbreiterung, d. h. die Güte, beschreibt.

Die spektrale Dichte wird aus dem Imaginärteil der Greensfunktion berechnet. Während der Imaginärteil von $G_a(\omega)$ genau eine Lorentzfunktion ergibt und damit der gängigen Approximation der spektralen Dichte eines Resonators entspricht, weicht die exakte spektrale Dichte, wie in Abbildung 4.10 zu sehen ist, von dieser ab. Die rote Kurve entspricht der spektralen Dichte mit approximiertem Kopplungsterm $J_a(\omega)$ und wird durch eine Lorentzkurve beschrieben. Die blaue Kurve zeigt den Verlauf der exakten spektralen Dichte $J(\omega)$. Hierbei wurde ein Resonator mittlerer Güte angenommen ($\Gamma_1 = 0.5$). Im Fall hoher Güte ist die Abweichung der Kurven kaum zu erkennen (siehe Abbildung 4.12, wobei $\Gamma_1 = 0.1$), wohingegen mit abnehmender Güte der Unterschied zwischen den Kurven zunimmt (siehe Abbildung 4.11, wobei $\Gamma_1 = 0.9$).

Im Folgenden wird eine analytische Darstellung dieser Abweichung ermittelt und deren Gewicht in verschiedenen Regimes quantifiziert.

Der analytische Ausdruck der Abweichung von der Lorentzkurve $\xi(\omega)$ kann wie folgt berechnet werden

$$G_{\Sigma}(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\omega - \omega_{res} + i\Gamma_1} + \xi(\omega). \quad (4.58)$$

Diese Abweichung $\xi(\omega)$ von $G_a(\omega)$ wird als Asymmetrieterm bezeichnet, da die Lorentz-

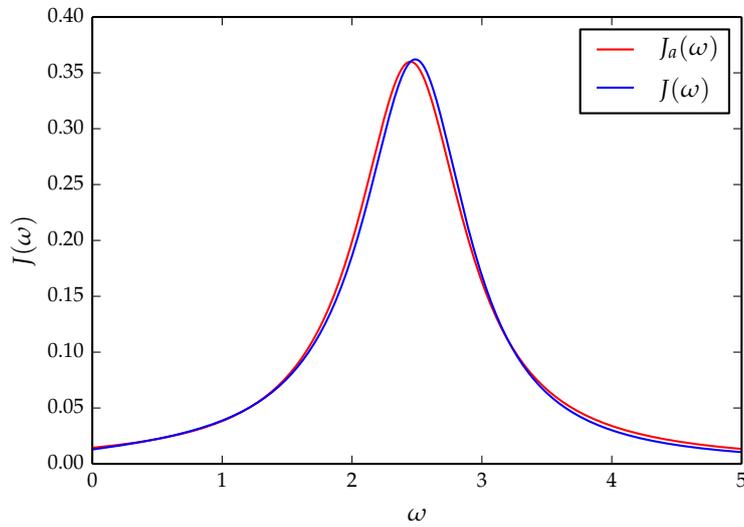


Abbildung 4.10.: Vergleich der spektralen Dichten unter Verwendung verschiedener Kopplungsterme, $\Gamma_1 = 0.5$.

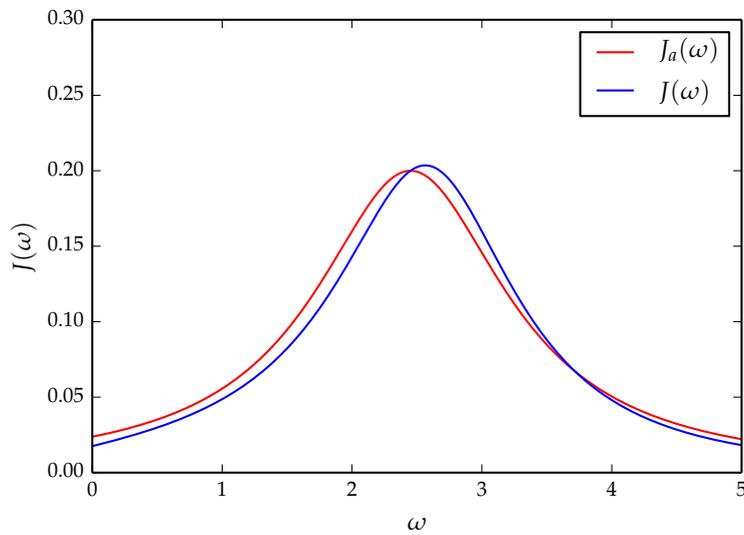


Abbildung 4.11.: Vergleich der spektralen Dichten unter Verwendung verschiedener Kopplungsterme, $\Gamma_1 = 0.9$.

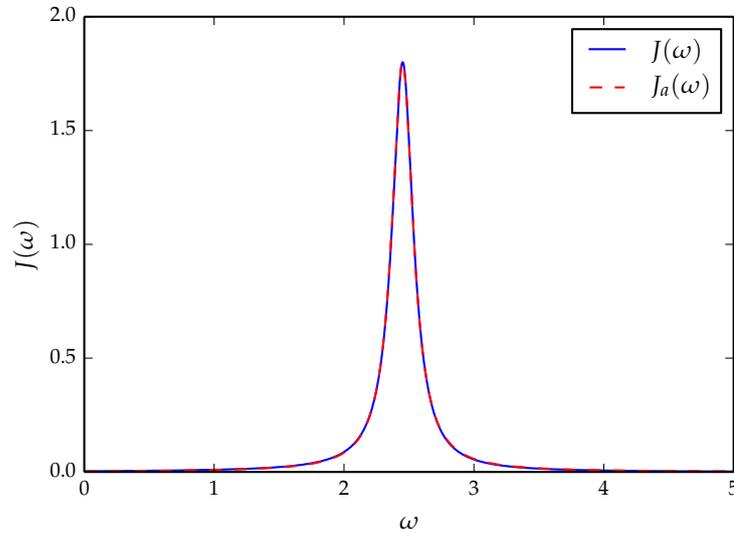


Abbildung 4.12.: Vergleich der spektralen Dichten unter Verwendung verschiedener Kopplungsterme, $\Gamma_1 = 0.1$.

funktion symmetrisch ist und durch den zusätzlichen Term diese Symmetrie gebrochen wird. Das Ergebnis für den Asymmetrieterm hängt von den Parametern des Resonators ω_{res} und Γ_1 ab und ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\xi(\omega) = \frac{\Gamma_1(\omega - \omega_{res})}{(i\Gamma_1 + \omega - \omega_{res})(-i\omega^2 + \omega_{res}(2\Gamma_1 + i\omega_{res}))}. \quad (4.59)$$

Bei der Entwicklung des Asymmetrieterms der spektralen Dichte $J_\xi(\omega) = \text{Im}(\xi(\omega))$ für hohe Güten verschwindet der Term 0. Ordnung.

$$J_\xi(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_{res}^2} \Gamma_1 + \mathcal{O}(\Gamma_1^2) \quad (4.60)$$

Daher ist die Abweichung von der Lorentzfunktion in diesem Fall vernachlässigbar. Bei der Betrachtung der Entwicklung für geringe Güten ($\Gamma_1 = 1$) tritt bereits ein nicht

verschwindender Term in 0. Ordnung auf.

$$J_\xi(\omega) = \left(\frac{1}{(\omega - \omega_{res})^2 + 1} - \frac{2\omega_{res}(\omega + \omega_{res})}{(\omega^2 - \omega_{res}^2)^2 + 4\omega_{res}^4} \right) + \mathcal{O}(\Gamma_1 - 1) \quad (4.61)$$

Hierbei ist die Abweichung von der Lorentzfunktion nicht mehr vernachlässigbar.

Die spektrale Dichte eines Resonators kann somit im Fall hoher Güte durch die Lorentzfunktion approximiert werden, im Fall geringer Güte muss jedoch die exakte Darstellung $J(\omega)$ verwendet werden. Dieses Ergebnis kann mithilfe des klassischen, gedämpften harmonischen Oszillators plausibel gemacht werden, da Resonatoren durch gedämpfte harmonische Oszillatoren beschrieben werden. Wie im Anhang D gezeigt wird, ergibt sich auch hier ein asymmetrisches Spektrum, dessen Asymmetrie mit zunehmender Güte vernachlässigbar wird.

4.3. Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel wurde die Fragestellung nach der Realisierung des bosonischen Bades im Quantenemulator bearbeitet. Ein zentrales Problem bestand in der Modellierung des niederfrequenten Verhaltens der subohmschen spektralen Dichte. Da die lorentzförmige spektrale Dichte eines Resonators eher einem superohmschen Verlauf folgt, war es nicht möglich den steilen Anstieg der subohmschen spektralen Dichte allein mithilfe aufsummierter Resonatorspektren zu approximieren.

Die spektrale Dichte konnte jedoch mithilfe eines Bandpasses und eines zentralen Resonators mit N Hilfsresonatoren auf einem separaten Chip realisiert werden. Im Fall von 35 Hilfsresonatoren ergab der numerische Fit allerdings im Experiment nicht umsetzbare Parameter für die Resonatoren. Die zugehörige spektrale Dichte weist einen Verlauf auf, wie er auch bei einer Fano-Resonanz zu beobachten ist.

Da die Parameter der Resonatoren experimentell stark begrenzt sind, wurde in einem weiteren Schritt eine Fano-Resonanz mithilfe nur zweier realistisch dimensionierter Re-

sonatoren erzeugt. Hierzu wird ein Aufbau bestehend aus einem zentralen Resonator und einem Hilfsresonator benötigt, wobei diese ähnliche Frequenzen und sehr unterschiedliche Güten aufweisen müssen. Anschließend wurde eine subohmsche spektrale Dichte an die Fano-Resonanz gefittet. Dadurch konnte gezeigt werden, dass die Fano-Resonanz einen subohmschen Anstieg aufweist und sich daher sehr gut für die Realisierung verschiedener subohmscher spektraler Dichten im Quantenemulator eignet. Die verschiedenen Konfigurationen können durch die Veränderung der Parameter der Resonatoren erzielt werden.

5. Zusammenfassung

Im Fall sehr starker Kopplungen in Verbindung mit einer subohmschen spektralen Dichte ist es nicht möglich, das Spin-Boson Modell in einer klassischen Simulation effizient und eindeutig zu lösen [WDLZ13]. Quantenemulatoren überwinden diese Beschränkungen klassischer Simulationen, da sie ebenso wie die physikalisch interessanten Systeme den Gesetzen der Quantenmechanik gehorchen.

In der vorliegenden Masterarbeit wurde ein analoger Quantenemulator für das Spin-Boson Modell unter Zuhilfenahme supraleitender Schaltkreise entwickelt.

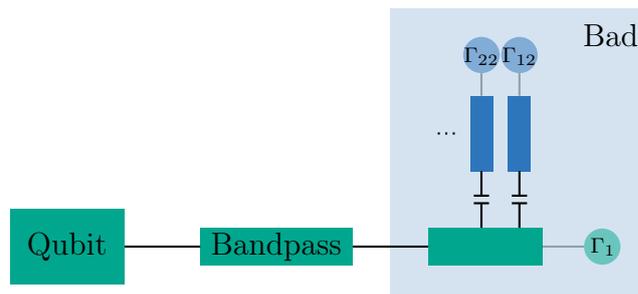


Abbildung 5.1.: Bosonisches Bad bestehend aus einem zentralen Resonator (grün) und N Hilfsresonatoren (blau). Die transparenten Kreise sind nur Bestandteil des mathematischen Modells realer Resonatoren.

Während der in Abbildung 5.1 gezeigte experimentelle Aufbau bestehend aus einem Qubit und einer Schaltung aus Resonatoren sehr einfach und nachvollziehbar ist, stellte die experimentelle Umsetzung zunächst eine große Hürde dar. Zum einen waren die Parameter des Quantenemulators experimentell bedingt beschränkt, sodass das physikalisch interessante Regime nicht eingestellt werden konnte, zum anderen war zunächst

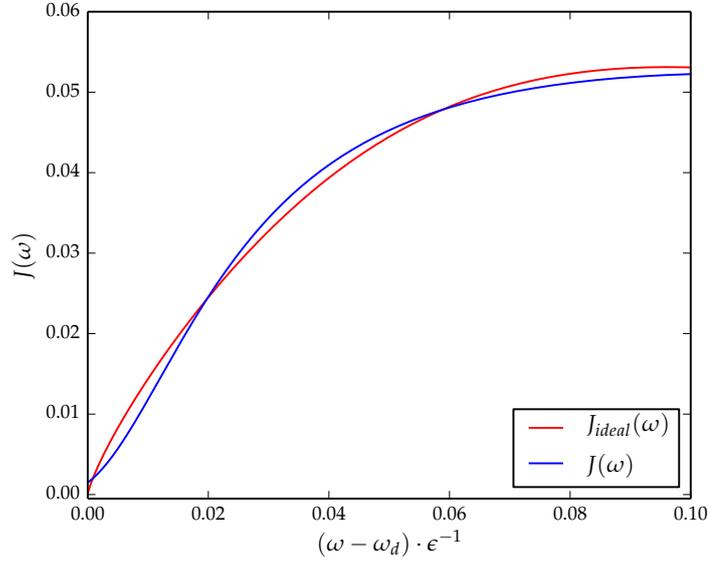


Abbildung 5.2.: Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator.

nicht klar, wie verschiedene Konfigurationen der spektralen Dichte des bosonischen Bades realisiert werden könnten.

Um das physikalisch interessante ultra-starke Wechselwirkungsregime einzustellen, wurde der Hamiltonoperator des Spin-Boson Modells im Laborsystem durch zwei transversale, treibende Felder erweitert. Es konnte gezeigt werden, dass dadurch im Wechselwirkungsbild des rotierenden Bezugssystems strukturell der Hamiltonoperator des Spin-Boson Modells mit nahezu beliebig einstellbaren Parametern entsteht.

$$H'_{td,I} = \frac{1}{2} \frac{A_2}{2} \sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i \frac{f_i}{2} (b_i^\dagger + b_i) \quad (5.1)$$

Die Energien des Zwei-Zustands-Systems und des bosonischen Bades werden somit durch die Amplitude und die Frequenz der transversalen, treibenden Felder bestimmt. Diese können in einem großen Bereich variiert werden, sodass sowohl das schwache als auch das ultra-starke Wechselwirkungsregime eingestellt werden können.

Für die Realisierung des bosonischen Bades wurde, wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist, ein Chip vorgeschlagen, auf dem sich ein sogenannter zentraler Resonator befindet, der mittels eines Bandpasses an das Qubit gekoppelt werden kann.

Die spektrale Dichte des zentralen Resonators wurde durch Kopplung an weitere Resonatoren manipuliert, die ihrer Wirkung entsprechend als Hilfsresonatoren bezeichnet werden. Durch die Wahl der Kopplungen, Güten und Frequenzen dieser zusätzlichen Resonatoren lassen sich beliebige Konfigurationen der spektralen Dichte erzeugen. Durch die Fertigung mehrerer Chips mit unterschiedlichen spektralen Dichten ist es somit möglich, mit einem Qubit mehrere Experimente durchzuführen.

In der vorliegenden Masterarbeit wurde ein besonderes Augenmerk auf die Realisierung einer subohmschen spektralen Dichte gerichtet. Denn diese in Verbindung mit dem ultra-starken Wechselwirkungsregime stellt das in klassischen Simulationen nicht eindeutig lösbare Modell dar, für das der Quantenemulator entwickelt werden sollte.

Mithilfe eines numerischen Fits wurden die benötigten Parameter der Resonatoren ermittelt. Das Resultat für die spektrale Dichte des zentralen Resonators gekoppelt an einen einzigen Hilfsresonator ist in der Abbildung 5.2 dargestellt. Der wurzelförmige Verlauf wird durch ein Artefakt der Fano-Resonanz geprägt.

Demzufolge konnten insgesamt beide anfänglichen Probleme behoben werden. Nun ist es möglich, sowohl das ultra-starke als auch das schwache Wechselwirkungsregime unter Verwendung einer beliebigen spektralen Dichte einzustellen. Der in dieser Masterarbeit vorgeschlagene Quantenemulator ist somit unter Berücksichtigung experimenteller Restriktionen realisierbar. Die experimentelle Umsetzung ist zeitnah im Rahmen der Dissertation von Jochen Braumüller in der Arbeitsgruppe Ustinov am Physikalischen Institut des Karlsruher Instituts für Technologie vorgesehen.

A. Transformationen

A.1. Rotierendes Bezugssystem

Im Folgenden wird die Transformation des Hamiltonoperators

$$H_t = \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i + \sigma_x \sum_i f_i (b_i^\dagger + b_i) + A\sigma_x \cos(\omega_{dr}t) \quad (\text{A.1})$$

ins rotierende Bezugssystem mithilfe der in Gleichung (A.2) angegebenen Transformationsmatrix durchgeführt.

$$U_{rf} = e^{i\omega_{dr}t(\sum_i b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2}\sigma_z)} \quad (\text{A.2})$$

Durch Einsetzen des transformierten Zustands $|\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle$ in die Schrödingergleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} H_t U^\dagger |\tilde{\psi}\rangle &= i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U^\dagger |\tilde{\psi}\rangle \right\} \\ \rightarrow \underbrace{\left\{ U H_t U^\dagger - i U \dot{U}^\dagger \right\}}_{=H'_t} |\tilde{\psi}\rangle &= i \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Zur Berechnung von H'_t werden die nachfolgenden Identitäten benötigt:

$$\begin{aligned} U \sigma_x U^\dagger &= e^{i\omega_{dr}t\sigma_z} \sigma_x = e^{i\omega_{dr}t} \sigma_+ + e^{-i\omega_{dr}t} \sigma_-, \\ \text{mit } \{\sigma_x, \sigma_z\} &= 0 \text{ und } \sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$Ub_i^\dagger U^\dagger = e^{i\omega_{dr}t} b_i^\dagger \quad \text{und} \quad Ub_i U^\dagger = e^{-i\omega_{dr}t} b_i. \quad (\text{A.5})$$

Somit transformiert der Hamiltonoperator H_t wie folgt, wobei die ersten beiden Terme mit U vertauschen und damit von der Transformation unberührt bleiben:

$$\begin{aligned} H_t' &= \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i + (e^{i\omega_{dr}t}\sigma_+ + e^{-i\omega_{dr}t}\sigma_-) \sum_i f_i (e^{i\omega_{dr}t} b_i^\dagger + e^{-i\omega_{dr}t} b_i) \\ &+ A (e^{i\omega_{dr}t}\sigma_+ + e^{-i\omega_{dr}t}\sigma_-) \cos(\omega_{dr}t) - \omega_{dr} \left(\sum_i b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2}\sigma_z \right) \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Unter Verwendung von $\cos(\omega_{dr}t) = 1/2(e^{i\omega_{dr}t} + e^{-i\omega_{dr}t})$ ergibt sich der folgende, exakte Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned} H_t' &= \frac{1}{2}(\epsilon - \omega_{dr})\sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_{dr}) b_i^\dagger b_i + \sum_i f_i (\sigma_+ b_i^\dagger + \sigma_- b_i) + \frac{1}{2}A\sigma_x \\ &+ \sum_i f_i (e^{i2\omega_{dr}t}\sigma_+ b_i^\dagger + e^{-i2\omega_{dr}t}\sigma_- b_i) + \frac{1}{2}A (e^{i2\omega_{dr}t}\sigma_+ + e^{-i2\omega_{dr}t}\sigma_-). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Aufgrund dessen, dass $f_i, A \ll \omega_d$, kann eine Rotating Wave Approximation angewendet werden. Dies führt zu einer Vernachlässigung der zeitabhängigen Terme. Damit wird der Hamiltonoperator im rotierenden Bezugssystem des transversalen, treibenden Feldes durch Gleichung (3.4) beschrieben.

A.2. Wechselwirkungsbild

Im Folgenden wird die vollständige Rechnung zum Abschnitt 3.1.2 beschrieben. Die Ergebnisse der Rechnung des Abschnitts 3.1.1 lassen sich direkt daraus ableiten.

Der Hamiltonoperator mit zwei transversalen, treibenden Feldern, wobei A_i und ω_i der Amplitude und Frequenz des i -ten transversalen, treibenden Feldes entsprechen, wird zunächst analog zu Anhang A.1 ins rotierende Bezugssystem überführt. Als Ergebnis

ergibt sich

$$H'_{td} = \frac{1}{2} (\epsilon - \omega_1) \sigma_z + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i + \sum_i f_i (\sigma_- b_i^\dagger + \sigma_+ b_i) + \frac{1}{2} A_1 \sigma_x + \frac{1}{2} A_2 (\sigma_+ e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \sigma_- e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) . \quad (\text{A.8})$$

Der Kopplungsterm an das erste transversale, treibende Feld ist nun zeitunabhängig $H_{K1} = \frac{1}{2} A_1 \sigma_x$ und wird daher als führende Kopplung behandelt, wohingegen die Kopplung an das zweite treibende Feld störtheoretisch berücksichtigt werden soll. Es erfolgt somit eine Transformation ins Wechselwirkungsbild bezüglich H_{K1} .

$$H'_{td,I} = e^{iH_{K1}t} \left\{ H'_{td} - H_{K1} \right\} e^{-iH_{K1}t} \quad (\text{A.9})$$

Zur Berechnung von $H'_{td,I}$ werden die folgenden Identitäten verwendet:

$$e^{iH_{K1}t} \sigma_z e^{-iH_{K1}t} = \cos(A_1 t) \sigma_z - \sin(A_1 t) \sigma_y , \\ \text{mit } \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y \quad (\text{A.10})$$

$$e^{iH_{K1}t} \sigma_\pm e^{-iH_{K1}t} = \mp \frac{i}{2} \sin(A_1 t) \sigma_z + \cos^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_\pm + \sin^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_\mp \quad (\text{A.11})$$

Unter Zuhilfenahme dieser Zusammenhänge kann nun das Wechselwirkungsbild des Hamiltonoperators im rotierenden Bezugssystem in Gleichung (A.9) angegeben werden.

$$H'_{td,I} = \frac{1}{2} (\epsilon - \omega_1) \left\{ \cos(A_1 t) \sigma_z - \sin(A_1 t) \sigma_y \right\} + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i + \sum_i f_i \left\{ b_i \left[-\frac{i}{2} \sin(A_1 t) \sigma_z + \cos^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_+ + \sin^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_- \right] + b_i^\dagger \left[\frac{i}{2} \sin(A_1 t) \sigma_z + \cos^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_- + \sin^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_+ \right] \right\} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{1}{2} A_2 \left\{ \left[\mp \frac{i}{2} \sin(A_1 t) \sigma_z + \cos^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_{\pm} + \sin^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_{\mp} \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \right. \\ & \left. + \left[\mp \frac{i}{2} \sin(A_1 t) \sigma_z + \cos^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_{\pm} + \sin^2\left(\frac{A_1}{2} t\right) \sigma_{\mp} \right] e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Der Hamiltonoperator hat in dieser Basis eine stark unstrukturierte Form. Durch den Wechsel in die rotierte Spinbasis $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ mithilfe der Hadamard-Transformation $\tilde{H}'_{td,I} = \mathcal{H}^\dagger H'_{td,I} \mathcal{H}$, wobei

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

ergibt sich eine übersichtlichere Struktur. Denn hierbei wird $\sigma_z \rightarrow \sigma_x$ und $\sigma_y \rightarrow -\sigma_y$, wodurch sich der Hamiltonoperator durch die Anwendung von Additionstheoremen stark vereinfacht. Es wurden folgende Relationen verwendet:

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \quad \text{und} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \quad (\text{A.14})$$

Zudem wurde ausgenutzt, dass

$$\cos(x) \pm i \sin(x) = e^{\pm ix}. \quad (\text{A.15})$$

Dadurch ergibt sich der folgende ungenäherte Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned} \tilde{H}'_{td,I} &= \frac{\epsilon - \omega_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & 0 \end{pmatrix} + \sum_i (\omega_i - \omega_1) b_i^\dagger b_i \\ &+ \sum_i \frac{f_i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^{iA_1 t} \\ -e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} b_i^\dagger + \begin{pmatrix} 1 & -e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} b_i \right\} \\ &+ \frac{A_2}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^{iA_1 t} \\ -e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \begin{pmatrix} 1 & -e^{iA_1 t} \\ e^{-iA_1 t} & -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Bei der Rücktransformation in die normale Spinbasis transformiert einfach $\sigma_z \rightarrow \sigma_x$.

B. Berechnung der spektralen Dichte des bosonischen Bades

B.1. Bewegungsgleichungen im Zeitraum

Bewegungsgleichung von $G(t)$

Die Bewegungsgleichung von $G(t)$ lautet:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} G(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \langle e^{iHt} a e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \right\} \\ &= i \langle e^{iHt} [H, a] e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + \langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t) . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Der letzte Term ist nur bei $t = 0$ ungleich Null. Die δ -Funktion bewirkt, dass beim Integral über $\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t)$ nur der Term $\langle a(0) a^\dagger(0) \rangle_R$ beiträgt. Somit kann mithilfe der bosonischen Vertauschungsrelation $[a, a^\dagger] = 1$ der letzte Term aus Gleichung (B.1) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t) = \delta(t) \left\{ \langle a^\dagger(0) a(0) \rangle_R + 1 \right\} . \quad (\text{B.2})$$

Dabei beschreibt $\langle a^\dagger(0) a(0) \rangle_R = n_0$ die thermische Besetzung des Resonators zum Zeitpunkt $t = 0$, diese wird im Folgenden Null gewählt.

Gleichung (B.1) hängt vom Kommutator $[H, a]$ ab. Dieser kann unter Verwendung der bosonischen Vertauschungsrelationen und der Tatsache, dass Operatoren aus verschiedenen Räumen vertauschen, berechnet werden. Hierbei wird der Hamiltonoperator aus

Gleichung (4.2) verwendet.

$$\begin{aligned}
 [H, a] &= \omega_{res} \underbrace{[a^\dagger a, a]}_{=-a} + \sum_m t_m \underbrace{[(\tilde{a}_m + \tilde{a}_m^\dagger)(a + a^\dagger), a]}_{=[\tilde{a}_m^\dagger a^\dagger, a] + [\tilde{a}_m a^\dagger, a] = -\tilde{a}_m^\dagger - \tilde{a}_m} \\
 &\quad + \sum_n f_n \underbrace{[(b_n + b_n^\dagger)(a + a^\dagger), a]}_{=[b_n^\dagger a^\dagger, a] + [b_n a^\dagger, a] = -b_n^\dagger - b_n}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Der Kommutator in Gleichung (B.1) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} G(t) &= -i\omega_{res} \langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) - i \sum_m t_m (\langle \tilde{a}_m(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle \tilde{a}_m^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R) \Theta(t) \\
 &\quad - i \sum_n f_n (\langle b_n(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle b_n^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R) \Theta(t).
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Die Korrelatoren können nun durch die in Gleichung (4.5) definierten zugehörigen Greensfunktionen ersetzt werden. Damit hängt die Differentialgleichung zur Bestimmung von $G(t)$ nur von den anderen Greensfunktionen ab.

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} G(t) &= \omega_{res} G(t) + \sum_m t_m (L_m(t) + \tilde{L}_m(t)) \\
 &\quad + \sum_n f_n (F_n(t) + \tilde{F}_n(t)) + \delta(t) (1 + n_0)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Daher müssen auch deren Bewegungsgleichungen gelöst werden.

Das Ziel ist es, $L_k, \tilde{L}_k, F_k, \tilde{F}_k, P_{kn}, \tilde{P}_{kn}$ und \tilde{G} durch G auszudrücken, damit ergibt sich eine Differentialgleichung für G , die nur von den Systemparametern abhängt.

Bewegungsgleichung von $F_k(t)$

Die Bewegungsgleichung von $F_k(t)$ lautet:

$$i \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \langle e^{iHt} b_k e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \} \tag{B.6}$$

$$\Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) = i \langle e^{iHt} [H, b_k] e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + \langle b_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t). \quad (\text{B.7})$$

Der letzte Term ist wiederum nur bei $t = 0$ ungleich Null, denn die δ -Funktion bewirkt, dass nur $\langle b_k(0) a^\dagger(0) \rangle_R$ beiträgt.

Die Spur ist basisunabhängig, daher können bei deren Berechnung die Fockzustände verwendet werden. Aufgrund der Orthogonalität der Fockzustände ergibt der Korrelator $\langle b_k(0) a^\dagger(0) \rangle_R$ Null.

Der Kommutator

$$\begin{aligned} [H, b_k] &= \sum_j \bar{\omega}_j \underbrace{[b_j^\dagger b_j, b_k]}_{=-b_k} + \underbrace{\sum_n \sum_j \tilde{t}_{nj} [(\tilde{b}_{jn} + \tilde{b}_{jn}^\dagger) (b_j + b_j^\dagger), b_k]}_{=\sum_n \sum_j \tilde{t}_{nj} ([\tilde{b}_{jn}^\dagger b_j^\dagger, b_k] + [\tilde{b}_{jn} b_j^\dagger, b_k]) = -\sum_n \tilde{t}_{nk} (\tilde{b}_{kn}^\dagger + \tilde{b}_{kn})} \\ &+ \underbrace{\sum_n f_n [(b_n + b_n^\dagger) (a + a^\dagger), b_k]}_{=\sum_n f_n ([b_n^\dagger a^\dagger, b_k] + [b_n^\dagger a, b_k]) = -f_k (a^\dagger + a)} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

in Gleichung (B.7) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) &= -i \bar{\omega}_k \langle b_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) - i \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(\langle \tilde{b}_{kn}(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle \tilde{b}_{kn}^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) \\ &- i f_k \left(\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle a^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Die Korrelatoren können nun wiederum durch die in Gleichung (4.5) definierten zugehörigen Greensfunktionen ersetzt werden.

$$i \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) = \bar{\omega}_k F_k(t) + \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(t) + \tilde{P}_{kn}(t) \right) + f_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \quad (\text{B.10})$$

Bewegungsgleichung von $L_k(t)$

Analog zu den vorherigen Abschnitten soll nun die Bewegungsgleichung von $L_k(t)$ be-

stimmt werden, die Zeitableitung der rechten Seite wird hierbei direkt angegeben:

$$i \frac{\partial}{\partial t} L_k(t) = i \langle e^{iHt} [H, \tilde{a}_k] e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + \langle \tilde{a}_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t) . \quad (\text{B.11})$$

Mit der gleichen Begründung wie bei $F_k(t)$ trägt der letzte Term nicht bei.

Unter Verwendung des Hamiltonoperators aus Gleichung (4.2) kann der Kommutator zu

$$\begin{aligned} [H, \tilde{a}_k] &= \sum_n \omega^n \underbrace{[\tilde{a}_n^\dagger \tilde{a}_n, \tilde{a}_k]}_{=-\tilde{a}_k} + \underbrace{\sum_m t_m [(\tilde{a}_m + \tilde{a}_m^\dagger)(a + a^\dagger), \tilde{a}_k]}_{=\sum_m t_m ([\tilde{a}_m^\dagger a^\dagger, \tilde{a}_k] + [\tilde{a}_m^\dagger a, \tilde{a}_k]) = -t_k (a^\dagger + a)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

bestimmt werden. Der Kommutator in Gleichung (B.11) eingesetzt ergibt

$$i \frac{\partial}{\partial t} L_k(t) = -i\omega^k \langle \tilde{a}_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) - it_k (\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle a^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R) \Theta(t) . \quad (\text{B.13})$$

Die Korrelatoren können nun durch die Greensfunktionen $G(t)$ und $\tilde{G}(t)$ ersetzt werden.

$$i \frac{\partial}{\partial t} L_k(t) = \omega^k L_k(t) + t_k (G(t) + \tilde{G}(t)) \quad (\text{B.14})$$

Bewegungsgleichung von $P_{kn}(t)$

Um die Differentialgleichungen von $G(t)$ und $\tilde{G}(t)$ nur durch die Systemparameter ausdrücken zu können, wird noch $P_{kn}(t)$ benötigt. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} P_{kn}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \langle e^{iHt} \tilde{b}_{kn} e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) \right\} \\ &= i \langle e^{iHt} [H, \tilde{b}_{kn}] e^{-iHt} a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + \langle \tilde{b}_{kn}(t) a^\dagger(0) \rangle_R \delta(t) . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

in Gleichung (B.19) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(t) = & i \omega_{res} \langle a^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + i \sum_m t_m \left(\langle \tilde{a}_m(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle \tilde{a}_m^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) \\
 & + i \sum_n f_n \left(\langle b_n(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle b_n^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) .
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Die Korrelatoren können nun durch die zugehörigen Greensfunktionen ersetzt werden. Damit hängt die Differentialgleichung zur Bestimmung von $\tilde{G}(t)$ nur von den anderen Greensfunktionen ab.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(t) = -\omega_{res} \tilde{G}(t) - \sum_m t_m \left(L_m(t) + \tilde{L}_m(t) \right) - \sum_n f_n \left(F_n(t) + \tilde{F}_n(t) \right) \tag{B.22}$$

Im Vergleich zu Gleichung (B.5) unterscheidet sich die Gleichung für $\tilde{G}(t)$ nur um ein Vorzeichen auf der rechten Seite und eine Konstante. Zudem wurden alle Greensfunktionen durch ihre Artverwandte $X \rightarrow \tilde{X}$ ersetzt.

Bewegungsgleichung von $\tilde{F}_k(t)$

Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung von $\tilde{F}_k(t)$ bestimmt.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_k(t) = i \left\langle e^{iHt} \left[H, b_k^\dagger \right] e^{-iHt} a^\dagger(0) \right\rangle_R \Theta(t) + \left\langle b_k^\dagger(t) a^\dagger(0) \right\rangle_R \delta(t) \tag{B.23}$$

Wiederum trägt der letzte Term nur bei $t = 0$ bei. Aufgrund der Orthogonalität der Fockzustände ergibt $\left\langle b_k^\dagger(0) a^\dagger(0) \right\rangle_R$ jedoch Null.

Um die Differentialgleichung zur Bestimmung von $\tilde{F}_k(t)$ angeben zu können, wird der Kommutator, der im Folgenden bestimmt wird, in Gleichung (B.23) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 [H, b_k^\dagger] &= \sum_j \bar{\omega}_j \underbrace{[b_j^\dagger b_j, b_k^\dagger]}_{=b_k^\dagger} + \underbrace{\sum_n \sum_j \tilde{t}_{nj} [(\tilde{b}_{jn} + \tilde{b}_{jn}^\dagger) (b_j + b_j^\dagger), b_k^\dagger]}_{=\sum_n \sum_j \tilde{t}_{nj} ([\tilde{b}_{jn}^\dagger b_j, b_k^\dagger] + [\tilde{b}_{jn} b_j, b_k^\dagger]) = \sum_n \tilde{t}_{nk} (\tilde{b}_{kn}^\dagger + \tilde{b}_{kn})} \\
 &+ \underbrace{\sum_n f_n [(b_n + b_n^\dagger) (a + a^\dagger), b_k^\dagger]}_{=\sum_n f_n ([b_n a^\dagger, b_k^\dagger] + [b_n a, b_k^\dagger]) = f_k (a^\dagger + a)} \quad (B.24)
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_k(t) &= i \bar{\omega}_k \langle b_k^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + i \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(\langle \tilde{b}_{kn}(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle \tilde{b}_{kn}^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) \\
 &+ i f_k \left(\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle a^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t) . \quad (B.25)
 \end{aligned}$$

Nach dem Ersetzen der Korrelatoren durch die zugehörigen Greensfunktionen ergibt sich die Differentialgleichung zur Bestimmung von $\tilde{F}_k(t)$.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_k(t) = -\bar{\omega}_k \tilde{F}_k(t) - \sum_n \tilde{t}_{nk} \left(P_{kn}(t) + \tilde{P}_{kn}(t) \right) - f_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \quad (B.26)$$

Hier liegt der Unterschied zu Gleichung (B.10) nur im Ersetzen der Greensfunktionen $X \rightarrow \tilde{X}$ und im Wechsel des Vorzeichens der rechten Seite.

Bewegungsgleichung von $\tilde{L}_k(t)$

Die Bewegungsgleichung von $\tilde{L}_k(t)$ wird durch die nachfolgende Gleichung bestimmt:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}_k(t) = i \left\langle e^{iHt} [H, \tilde{a}_k^\dagger] e^{-iHt} a^\dagger(0) \right\rangle_R \Theta(t) + \left\langle \tilde{a}_k^\dagger(t) a^\dagger(0) \right\rangle_R \delta(t) . \quad (B.27)$$

Auch hier ergibt der letzte Term, der nur als $\left\langle \tilde{a}_k^\dagger(0) a^\dagger(0) \right\rangle_R$ beiträgt, wegen der Orthogonalität der Fockzustände Null.

Der hier berechnete Kommutator

$$\left[H, \tilde{a}_k^\dagger \right] = \sum_n \omega^n \underbrace{\left[\tilde{a}_n^\dagger \tilde{a}_n, \tilde{a}_k^\dagger \right]}_{=\tilde{a}_k^\dagger} + \underbrace{\sum_m t_m \left[(\tilde{a}_m + \tilde{a}_m^\dagger) (a + a^\dagger), \tilde{a}_k^\dagger \right]}_{=\sum_m t_m \left([\tilde{a}_m a^\dagger, \tilde{a}_k^\dagger] + [\tilde{a}_m a, \tilde{a}_k^\dagger] \right) = t_k (a^\dagger + a)} \quad (\text{B.28})$$

wird nun in Gleichung (B.27) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}_k(t) = i \omega^k \langle \tilde{a}_k(t) a^\dagger(0) \rangle_R \Theta(t) + i t_k \left(\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle_R + \langle a^\dagger(t) a^\dagger(0) \rangle_R \right) \Theta(t). \quad (\text{B.29})$$

Wiederum werden die Korrelatoren nun durch die entsprechenden Greensfunktionen $G(t)$ und $\tilde{G}(t)$ ersetzt.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}_k(t) = -\omega^k \tilde{L}_k(t) - t_k \left(G(t) + \tilde{G}(t) \right) \quad (\text{B.30})$$

Bewegungsgleichung von $\tilde{P}_{kn}(t)$

Die Bewegungsgleichung von $\tilde{P}_{kn}(t)$ lautet:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}_{kn}(t) = i \left\langle e^{iHt} \left[H, \tilde{b}_{kn}^\dagger \right] e^{-iHt} a^\dagger(0) \right\rangle_R \Theta(t) + \left\langle \tilde{b}_{kn}^\dagger(t) a^\dagger(0) \right\rangle_R \delta(t). \quad (\text{B.31})$$

Unter Verwendung der Fockzustände zur Berechnung der Spur ergibt sich, dass der Korrelator $\left\langle \tilde{b}_{kn}^\dagger(0) a^\dagger(0) \right\rangle_R$ gleich Null ist.

$$\left[H, \tilde{b}_{kn}^\dagger \right] = \underbrace{\sum_j \sum_m \omega_j^m \left[\tilde{b}_{jm}^\dagger \tilde{b}_{jm}, \tilde{b}_{kn}^\dagger \right]}_{=\omega_k^n \tilde{b}_{kn}^\dagger} + \underbrace{\sum_j \sum_m \tilde{t}_{mj} \left[(\tilde{b}_{jm} + \tilde{b}_{jm}^\dagger) (b_j + b_j^\dagger), \tilde{b}_{kn}^\dagger \right]}_{=\sum_j \sum_m \tilde{t}_{mj} \left([\tilde{b}_{jm} b_j^\dagger, \tilde{b}_{kn}^\dagger] + [\tilde{b}_{jm} b_j, \tilde{b}_{kn}^\dagger] \right) = \tilde{t}_{nk} (b_k^\dagger + b_k)} \quad (\text{B.32})$$

Dieser Kommutator wird nun in Gleichung (B.31) eingesetzt und die enthaltenen Kor-

relatoren durch die entsprechenden Greensfunktionen $F_k(t)$ und $\tilde{F}_k(t)$ ersetzt.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}_{kn}(t) = -\omega_n^k \tilde{P}_{kn}(t) - \tilde{t}_{kn} \left(F_k(t) + \tilde{F}_k(t) \right) \quad (\text{B.33})$$

B.2. Berechnung der Korrelatoren $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R$ und $\langle a(t)a(0) \rangle_R$

Zur Berechnung der noch fehlenden Korrelatoren $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R$ und $\langle a(t)a(0) \rangle_R$ ist das Vorgehen analog zu dem in Abschnitt 4.1.1.

Zunächst werden folgende Definitionen eingeführt:

$$G_2(t) = -i \langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R \Theta(t) \quad \tilde{G}_2(t) = -i \langle a(t)a(0) \rangle_R \Theta(t) . \quad (\text{B.34})$$

Zudem können weitere Greensfunktionen für die anderen auftretenden Korrelatoren definiert werden. Anschließend werden wiederum die Bewegungsgleichungen im Zeitraum benötigt.

Die Bewegungsgleichung von $G_2(t)$ lautet:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} G_2(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \langle e^{iHt} a^\dagger e^{-iHt} a(0) \rangle_R \Theta(t) \right\} \\ &= i \langle e^{iHt} [H, a^\dagger] e^{-iHt} a(0) \rangle_R \Theta(t) + \langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R \delta(t) . \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Der letzte Term ist nur bei $t = 0$ ungleich Null. Die δ -Funktion bewirkt, dass beim Integral über $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R \delta(t)$ nur der Term $\langle a^\dagger(0)a(0) \rangle_R$ beiträgt. Dabei beschreibt $\langle a^\dagger(0)a(0) \rangle_R = n_0$ die thermische Besetzung des Resonators zum Zeitpunkt $t = 0$.

Wird eine analoge Rechnung wie in Abschnitt 4.1.1 durchgeführt, so ergibt sich folgendes

Ergebnis:

$$G_2(\omega) = \frac{n_0 \left\{ i\Gamma_1 + \sum_n \frac{f_n^2 \left(1 - \frac{\omega + \bar{\omega}_n}{\omega - \bar{\omega}_n}\right)}{\omega + \bar{\omega}_n - i\Gamma_{n,2} \left(1 - \frac{\omega + \bar{\omega}_n}{\omega - \bar{\omega}_n}\right)} + \omega - \omega_{res} \right\}}{\omega^2 - \omega_{res}^2 + 2\omega_{res} \left\{ i\Gamma_1 + \sum_n \frac{f_n^2 \left(1 - \frac{\omega + \bar{\omega}_n}{\omega - \bar{\omega}_n}\right)}{\omega + \bar{\omega}_n - i\Gamma_{n,2} \left(1 - \frac{\omega + \bar{\omega}_n}{\omega - \bar{\omega}_n}\right)} \right\}} \propto n_0. \quad (\text{B.36})$$

Anschließend kann die Summe von $\langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_R$ und $\langle a(t)a(0) \rangle_R$ gebildet werden, diese ergibt

$$G_2(\omega) + \tilde{G}_2(\omega) = \left\{ 1 - \frac{\omega + \omega_{res}}{\omega - \omega_{res}} \right\} G_2(\omega) + \frac{n_0}{\omega - \omega_{res}}, \quad (\text{B.37})$$

Wie bereits zu Beginn von Abschnitt 4.1.1 angemerkt wurde, wird die thermische Besetzung $n_0 = 0$ gesetzt. Anhand der Gleichungen (B.36) und (B.37) ergibt sich für diesen Fall, dass $G_2(\omega) + \tilde{G}_2(\omega) = 0$. Daher ist die spektrale Dichte nur durch

$$J(\omega) = -\chi \cdot \text{Im} \left\{ G(\omega) + \tilde{G}(\omega) \right\} \quad (\text{B.38})$$

gegeben.

C. Parameter des numerischen Fits

k -ter Hilfsresonator	f_k in GHz	$\bar{\omega}_k$ in GHz	$\Gamma_{k,2}$ in GHz
0	0.6002	4.9592	0.001
1	5.1404	2.7434	1278.1664
2	7.5182	1.8256	1807.5998
3	9.3428	1.1214	2213.8484
4	10.8809	0.5277	2556.3317
5	12.2361	0.0046	2858.0656
6	13.4612	0.4683	3130.8539
7	14.5879	0.9032	3381.7087
8	15.6366	1.3079	3615.1986
9	16.6215	1.6881	3834.4971
10	17.5531	2.0477	4041.9148
11	18.4391	2.3897	4239.1959
12	19.2857	2.7164	4427.6957
13	20.0978	3.0299	4608.4918
14	20.8791	3.3314	4782.4579
15	21.6330	3.6224	4950.3142
16	22.3621	3.9039	5112.6625
17	23.0688	4.1766	5270.0118
18	23.7550	4.4415	5422.7974
19	24.4224	4.6991	5571.3947
20	25.0725	4.9500	5716.1303
21	25.7064	5.1947	5857.2905
22	26.3255	5.4337	5995.1280

C. Parameter des numerischen Fits

23	26.9307	5.6672	6129.8667
24	27.5228	5.8958	6261.7069
25	28.1027	6.1196	6390.8278
26	28.6711	6.3390	6517.3911
27	29.2287	6.5543	6641.5431
28	29.7761	6.7655	6763.4164
29	30.3138	6.9731	6883.1321
30	30.8423	7.1771	7000.8010
31	31.3620	7.3777	7116.5246
32	31.8734	7.5751	7230.3962
33	32.3769	7.7694	7342.5020
34	32.8729	7.9608	7452.9218

Tabelle C.1.: Kopplungen, Energien und Güten des numerischen Fits mit 35 Hilfsresonatoren.

D. Klassischer, gedämpfter harmonischer Oszillator

Resonatoren werden durch quantisierte, harmonische Oszillatoren beschrieben. Im Verlauf dieser Rechnung ergibt sich als exaktes Resultat ein asymmetrisches Spektrum (siehe Gleichung (4.56)). In diesem Abschnitt soll nun als Vergleich der klassische, gedämpfte harmonische Oszillator herangezogen werden, da dieser in seinen Eigenschaften einem Resonator am nächsten kommt.

Die Bewegungsgleichung des klassischen, gedämpften harmonischen Oszillators ist durch

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\omega_d t} \quad (\text{D.1})$$

gegeben. Mit dem Ansatz $x = x_0 e^{i\omega_d t}$ ergibt sich:

$$x_0 = \frac{f}{(\omega_0 - \omega_d)(\omega_0 + \omega_d) + i\omega_d \gamma}. \quad (\text{D.2})$$

Somit ist gezeigt, dass auch im klassischen Fall für den gedämpften, klassischen Oszillator ein asymmetrisches Spektrum entsteht, da es von $(\omega_0 + \omega_d)$ abhängt.

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Ohmsche, subohmsche und superohmsche spektrale Dichte	13
2.2.	Konzept des Quantenemulators für das Spin-Boson Modell	16
3.1.	Besetzungswahrscheinlichkeit mit $A_2 = 0$; Parameter aus [BRGR ⁺ 12] . .	26
3.2.	Besetzungswahrscheinlichkeit mit $A_2 = 0.01 \cdot 2\pi\text{MHz}$; Parameter aus [BRGR ⁺ 12]	26
3.3.	Besetzungswahrscheinlichkeit mit $A_2 = 0$	27
3.4.	Besetzungswahrscheinlichkeit mit $A_2 \neq 0$	27
3.5.	Besetzungswahrscheinlichkeit mit $A_2 = 0$; Zusammenbruch der Näherung	28
4.1.	Spektrale Dichte – Ideenskizze	31
4.2.	Bad bestehend aus einem zentralen Resonator und N Hilfsresonatoren . .	32
4.3.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und 35 Hilfsresonatoren	46
4.4.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und 35 Hilfsresonatoren	46
4.5.	Numerischer Fit; Bandpass	47
4.6.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.8$.	48
4.7.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.8$.	48
4.8.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.45$	50
4.9.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator; $s = 0.45$	50
4.10.	Abweichung von der Lorentzfunktion, mittlere Güte $\Gamma_1 = 0.5$	53
4.11.	Abweichung von der Lorentzfunktion, geringe Güte $\Gamma_1 = 0.9$	53
4.12.	Abweichung von der Lorentzfunktion, hohe Güte $\Gamma_1 = 0.1$	54
5.1.	Bad bestehend aus einem zentralen Resonator und N Hilfsresonatoren . .	57
5.2.	Numerischer Fit; ein zentraler Resonator und ein Hilfsresonator	58

Tabellenverzeichnis

C.1. Parameter des numerischen Fits mit 35 Hilfsresonatoren	76
---	----

Literaturverzeichnis

- [BF04] BRUUS, Henrik ; FLENSBERG, Karsten: Many-body quantum theory in condensed matter physics - an introduction. Oxford University Press, 2004. – ISBN 0198566336
- [BN09] BULUTA, Iulia ; NORI, Franco: Quantum simulators. In: Science 326 (2009), Nr. 5949, S. 108–111
- [BRGR⁺12] BALLESTER, D. ; ROMERO, G. ; GARCIA-RIPOLL, J. J. ; DEPPE, F. ; SOLANO, E.: Quantum Simulation of the Ultrastrong-Coupling Dynamics in Circuit Quantum Electrodynamics. In: Phys. Rev. X 2 (2012), May, S. 021007
- [Bru12] BRUMFIEL, Geoff: Simulation: Quantum leaps. In: Nature 491 (2012), Nr. 7424, S. 322–324
- [BSK⁺12] BRITTON JOSEPH W. ; SAWYER BRIAN C. ; KEITH ADAM C. ; WANG C.-C. JOSEPH ; FREERICKS JAMES K. ; UYS HERMANN ; BIERCUK MICHAEL J. ; BOLLINGER JOHN J.: Engineered two-dimensional Ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins. In: Nature 484 (2012), apr, Nr. 7395, S. 489–492. – 10.1038/nature10981
- [DiV96] DIVINCENZO, D. P.: Topics in Quantum Computers. In: eprint arXiv:cond-mat/9612126 (1996)
- [DMN13] DEVITT, Simon J. ; MUNRO, William J. ; NEMOTO, Kae: Quantum error correction for beginners. In: Reports on Progress in Physics 76 (2013), Nr. 7, S. 076001
- [Fan61] FANO, U.: Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts. In: Phys. Rev. 124 (1961), Dec, S. 1866–1878
- [Fey82] FEYNMAN, Richard: Simulating Physics with Computers. In: International Journal of Theoretical Physics 21 (1982), S. 467–488

- [FV63] FEYNMAN, Richard P. ; VERNON, Frank L.: The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. In: Annals of physics 24 (1963), S. 118–173
- [GAN14] GEORGESCU, I. M. ; ASHHAB, S. ; NORI, Franco: Quantum simulation. In: Rev. Mod. Phys. 86 (2014), Mar, S. 153–185
- [HCT⁺12] HAUKE, Philipp ; CUCCHIETTI, Fernando M. ; TAGLIACOZZO, Luca ; DEUTSCH, Ivan ; LEWENSTEIN, Maciej: Can one trust quantum simulators? In: Reports on Progress in Physics 75 (2012), Nr. 8, S. 082401
- [LCD⁺87] LEGGETT, A. J. ; CHAKRAVARTY, S. ; DORSEY, A. T. ; FISHER, Matthew P. A. ; GARG, Anupam ; ZWERGER, W.: Dynamics of the dissipative two-state system. In: Rev. Mod. Phys. 59 (1987), Jan, S. 1–85
- [LSK⁺13] LI JIAN ; SILVERI M.P. ; KUMAR K.S. ; PIRKKALAINEN J.-M. ; VEPSALAINEN A. ; CHIEN W.C. ; TUORILA J. ; SILLANPAA M.A. ; HAKONEN P.J. ; THUNEBERG E.V. ; PARAOANU G.S.: Motional averaging in a superconducting qubit. In: Nat Commun 4 (2013), jan, S. 1420. – 10.1038/ncomms2383
- [MRE⁺12] MOSTAME, Sarah ; REBENTROST, Patrick ; EISFELD, Alexander ; KERMAN, Andrew J. ; TSOMOKOS, Dimitris I. ; ASPURU-GUZI, Alán: Quantum simulator of an open quantum system using superconducting qubits: exciton transport in photosynthetic complexes. In: New Journal of Physics 14 (2012), Nr. 10, S. 105013
- [NPTG07] NESI, Francesco ; PALADINO, Elisabetta ; THORWART, Michael ; GRIFONI, Milena: Spin-boson dynamics beyond conventional perturbation theories. In: Phys. Rev. B 76 (2007), Oktober, Nr. 15; 15, S. 155323
- [WDLZ13] WU, Ning ; DUAN, Liwei ; LI, Xin ; ZHAO, Yang: Dynamics of the sub-Ohmic spin-boson model: A time-dependent variational study. In: The Journal of Chemical Physics 138 (2013), Nr. 8