Karlsruher Institut für Technologie

Institut f"ur Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Lösungsvorschlag zu Blatt 7

31.05.2010

---

1. Dichteoperator für Spin-1/2 Systeme:

(a)

$$\rho_{|+\rangle} = \Pi_i \, |+_i\rangle \langle +_i| \tag{1}$$
$$\rho_{|+\rangle} = | + + + + \ldots \rangle \langle + + + + \ldots | \tag{2}$$

(b) Für einen Spin,

$$\begin{aligned} \rho_{|+\rangle_x, i} &= (|+_i\rangle + |-_i\rangle)\,(\langle +_i| + \langle -_i|) \\ &= (|+_i\rangle \langle +_i| + |+_i\rangle \langle -_i| + |-_i\rangle \langle +_i| + |-_i\rangle \langle -_i|) \end{aligned} \tag{3}$$

Für alle Spins

$$\rho_{|+\rangle_x} = \Pi_i \rho_{|+\rangle_x, i} \tag{4}$$

(c)

$$\rho_{|+\rangle_x |-\rangle_x} = \frac{1}{2}\rho_{|+\rangle_x} + \frac{1}{2}\rho_{|-\rangle_x} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

(d)

$$\langle \sigma_x^j \rangle = \langle (\sigma_+^j + \sigma_-^j) \rangle = \mathrm{tr}(\rho(\sigma_+^j + \sigma_-^j)) \tag{7}$$

Da alle Spins ausser Spin-j raussummiert werden, reicht es für einen Spin den Erwartungswert auszurechnen.
Für b) ergibt sich sofort

$$\langle \sigma_x^j \rangle = = 1 \tag{8}$$

Für c) ergibt sich damit

$$\langle \sigma_x^j \rangle = 0 \tag{9}$$

2. Reduzierte Dichtematrix:
$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle\right)$

(a) Nicht verschwindende Matrixelemente:

$$\langle + - |\Psi\rangle \langle\Psi| + -\rangle = \langle - + |\Psi\rangle \langle\Psi| - +\rangle = \frac{1}{2} \tag{10}$$

$$\langle + - |\Psi\rangle \langle\Psi| - +\rangle = \langle - + |\Psi\rangle \langle\Psi| + -\rangle = -\frac{1}{2} \tag{11}$$

Rest 0

$$\Rightarrow \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Reiner Zustand wenn $\rho^2 = \rho$:

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho \Rightarrow \text{Reiner Zustand} \tag{13}$$

(b)

$$\rho_{red} = \sum_{\sigma_2} (\mathbf{1}_1 \otimes \langle\sigma_2|) \frac{1}{2} (|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle)(\langle{+}{-}| - \langle{-}{+}|)(\mathbf{1}_1 \otimes |\sigma_2\rangle) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\rho_{red}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \rho_{red} \Rightarrow \text{Gemischter Zustand} \tag{17}$$

3. Bewegungsgleichung der Dichtematrix:

$$H|i\rangle = E_i |i\rangle \tag{18}$$

QM Liouville-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}(t)]$

$$i\hbar \langle n| \dot{\rho} |m\rangle = \langle n| [H, \hat{\rho}] |m\rangle \tag{19}$$

$$= \langle n| H\hat{\rho} |m\rangle - \langle n| \hat{\rho} H |m\rangle \qquad \text{nutze: } H = H^\dagger \tag{20}$$

$$= E_n \rho_{nm} - E_m \rho_{nm} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_{nm} = -\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)\rho_{nm} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \rho_{nm}(t) = \rho_{nm}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)} \tag{23}$$

4. Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix:

Gegeben: $H = B_z \frac{\sigma_z}{2}$, zum Zeitpunkt $t = 0$: $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$$\dot{\rho}_{++} = \dot{\rho}_{--} = 0 \tag{24}$$

$$\dot{\rho}_{+-} = -\tfrac{i}{\hbar}(1+1)\frac{B_z}{2}\rho_{+-} \Rightarrow \rho_{+-}(t) = \rho_{+-}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}B_z t} \tag{25}$$

$$\dot{\rho}_{-+} = -\tfrac{i}{\hbar}(-1-1)\frac{B_z}{2}\rho_{-+} \Rightarrow \rho_{-+}(t) = \rho_{-+}(0)e^{\frac{i}{\hbar}B_z t} \tag{26}$$