Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 7
Besprechung 18.06.2014

---

1. Zeitentwicklung (4 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z \tag{1}$$

in der Basis der beiden Zustände $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$. Zur Zeit $t = 0$ sei ein beliebiger Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \tag{2}$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ präpariert. Weiterhin sind $\hat{\sigma}_i$ $(i = x, y, z)$ die Paulimatrizen von Blatt 6 Aufgabe 3.

(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für beliebige Zeiten $t > 0$ und berechnen Sie $\langle\psi(t)|\hat{\sigma}_y|\psi(t)\rangle$.

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie $\hat{\sigma}_y^H(t)$ im Heisenbergbild und berechnen Sie $\langle\psi(0)|\hat{\sigma}_y^H(t)|\psi(0)\rangle$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (a).

(c) [1 Punkt] Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand (2) präpariert. Zur Zeit $t = \tau_1$ wird die Observable $\hat{\sigma}_x$ gemessen. Was sind die möglichen Werte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten der Messung?

(d) [1 Punkt] Nach der Messung in (c) wird zu einem späteren Zeitpunkt $\tau_2 > \tau_1$ wiederum $\hat{\sigma}_x$ gemessen. Was sind die möglichen Werte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten der Messung?

2. Wahrscheinlichkeitsverteilung und charakteristische Funktion (3 Punkte)

Die sogenannte charakteristische Funktion ist definiert durch

$$F(z) = \langle e^{iz\hat{A}}\rangle\,, \tag{3}$$

wobei $\langle\cdots\rangle$ den Erwartungswert bezüglich des Zustands $|\psi\rangle$ bezeichnet.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass Erwartungswerte beliebiger Potenzen von $\hat{A}$, d.h. $\langle\hat{A}^n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$, durch Differentiation von (3) nach z gewonnen werden können.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie weiter, dass die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von $\hat{A}$ den Wert a_i vorzufinden, gegeben ist durch

$$P(a_i) = \int \tfrac{dz}{2\pi} e^{-iza_i} F(z). \tag{4}$$

(c) [1 Punkt] Ein Zwei-Zustands-System $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ sei im Grundzustand $|\psi\rangle = |0\rangle$ präpariert und es werde die Observable $\hat{A} = \hat{\sigma}_x$ mit den möglichen Werten a_m gemessen. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion für diesen Fall und berechnen Sie $P(a_m)$.

3. Quantenmechanischer Virialsatz (3 Punkte)

Analog zur klassischen Mechanik gibt der Virialsatz auch in der Quantenmechanik einen Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle\hat{T}\rangle$ und dem Erwartungswert der potentiellen Energie $\langle V\rangle$. Für stationäre Zustände gilt:

$$\left\langle\hat{T}\right\rangle = \left\langle\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\hat{\mathbf{X}}\,\nabla V(\hat{\mathbf{X}})\right\rangle. \tag{5}$$

Dieser Zusammenhang soll im Folgenden hergeleitet und angewendet werden:

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie in einer Dimension, dass für einen stationären Zustand gilt

$$\langle[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]\rangle = \langle\hat{H}\hat{X}\hat{P} - \hat{X}\hat{P}\hat{H}\rangle = 0, \tag{6}$$

indem Sie den Erwartungswert der rechten Seite von (6)) direkt berechnen.

(b) [1 Punkte] Berechnen Sie nun in (6) zuerst den Kommutator und erst dann den Erwartungswert um den Virialsatz (5) herzuleiten.

(c) [1 Punkt] Das Potential $V(\hat{X})$ sei nun durch $V(\hat{X}) = \lambda\hat{X}^n,\ n\in\mathbb{R}$ gegeben.
Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen $\langle\hat{T}\rangle$ und $\langle V\rangle$ her.
Wenden Sie den Viralsatz an um im Fall des harmonischen Oszillators das Verhältnis der Erwartungswerte von kinetischer Energie und potentieller Energie $\langle\hat{T}\rangle\,/\,\langle V\rangle$ zu berechnen.