Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön

Dr. Andreas Poenicke, Andreas Heimes

Blatt 4

Besprechung 21.05.2014

1. Teilchen im Dreieckspotenzial (3 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir ein Teilchen in einem Dreieckspotenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{für} \quad x \leq 0 \\ ax, & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}.$$

Hilfreich bei der Behandlung des Problems sind die Airy-Funktionen. Die beiden Airy-Funktionen $\mathrm{Ai}(x)$ und $\mathrm{Bi}(x)$ sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$f''(x) - xf(x) = 0. \tag{1}$$

Ihr Verlauf ist in Abbildung 1 dargestellt.

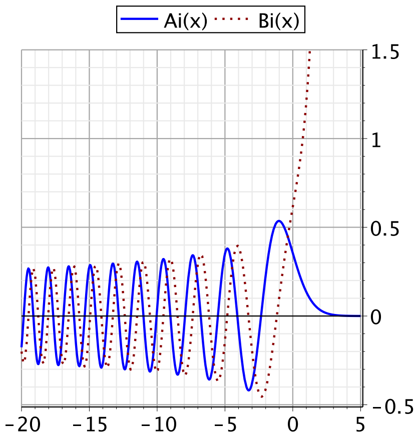

Abbildung 1:

Asymptotisch geht $\mathrm{Ai}(x)$ für $x \to \infty$ exponentiell gegen 0 während $\mathrm{Bi}(x)$ divergiert[1]. Die Nullstellen dieser Funktionen sind tabelliert. Nun sollen Ausdrücke für die Wellenfunktionen und Energieeigenwerte gefunden werden. Dazu:

(a) [1 Punkt] Formen Sie die Schrödingergleichung um in dem Sie die Variablentransformation $\bar{x} = x - \frac{E}{a}$ durchführen und die Gleichung durch Einführung einer charakteristischen Länge dimensionslos schreiben.

(b) [1 Punkt] Finden Sie die Energieniveaus, wobei Sie die Nullstellen x_n der Airy-Funktionen als bekannt voraussetzen können.

(c) [1 Punkt] Skizzieren Sie die drei energetisch niedrigsten Wellenfunktionen.

[1] Das genaue Verhalten ist

$$\mathrm{Ai}(x) \to \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\,x^{1/4}}, \quad \mathrm{Bi}(x) \to \frac{e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}}{\sqrt{\pi}\,x^{1/4}} \quad \text{für } x \to \infty,$$

wird aber für die Aufgabe nicht benötigt.

2. Allgemeine Eigenschaften eindimensionaler Probleme (2 Punkte)

Wir betrachten eindimensionale Systeme, nun allerdings ohne die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \Big[V(x) - E\Big]\psi = 0 \tag{2}$$

explizit zu lösen.

(a) **Entartung** [1 Punkt]
Zeigen Sie, daß die Energieniveaus gebundener Zuständen nicht entartet sind:
Nehmen Sie dazu an, dass die beiden Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ Eigenfunktionen der Schrödingergleichung(Gl. 2) zum selben Eigenwert E_1 sind. Berechnen Sie darüber, unter Berücksichtigung des Verhaltens gebundener Zustände für $|x| \to \infty$, $\psi_1'\psi_2 - \psi_2'\psi_1$ und zeigen Sie, dass die beiden Funktionen linear abhängig sind.

(b) **Knotensatz** [1 Punkt]
Der Knotensatz besagt, dass für ein diskretes Spektrum die nach Energien sortierten ($E_0 < E_1 < E_2 \cdots < E_n < \ldots$) Eigenfunktionen ψ_n zu den Energieeigenwerten E_n genau n Nullstellen (Knoten) haben[2].
Es läßt sich schnell beweisen, dass ψ_{n+1} mehr Nullstellen als ψ_n haben muss. Zeigen Sie, dass ψ_{n+1} zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_1, x_2 von ψ_n mindestens eine Nullstelle hat. (Hinweis: Berechnen Sie dazu $\psi_n'\psi_{n+1} - \psi_n\psi_{n+1}'\big|_a^b$ in einem geeigneten Intervall $[a, b]$.)

3. Harmonischer Oszillator (2 Punkte)

Die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators läßt sich alleine über die Unschärferelation und die Form des Potentials

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{3}$$

abschätzen:

Verwenden Sie nur die Unschärferelation für Δx und Δp sowie die Form des Potentials $U(x)$ um den Erwartungswert $\langle\hat{H}\rangle$ des Hamiltonoperators nach unten abzuschätzen. Vergleichen Sie die Abschätzung für E_0 mit dem bekannten Ergebnis.

4. Teilchen auf einem Ring (3 Punkte)

Ein freies Teilchen ($U(x) = 0$) bewege sich auf einem Ring mit Radius R. Die Eindeutigkeit der Wellenfunktion auf der geschlossenen Kreisbahn fordert die Randbedingung $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$.

(a) [1 Punkt] Drücken Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ in Polarkoordinaten aus, und bestimmen Sie dessen Eigenfunktionen. Zeigen Sie, dass die Randbedingung zu Energiequantisierung führt und leiten Sie einen Ausdruck für die Energieeigenwerte her. Welche Entartung haben die Energieniveaus?

(b) [1 Punkt] Normieren Sie die Wellenfunktionen und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(\phi)|^2$ auf dem Ring konstant ist.

(c) [1 Punkt] Der Drehimpulsoperator $\hat{L}_z$ ist gegeben durch

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen $\psi(\phi)$ auch dessen Eigenfunktionen sind und berechnen Sie Eigenwerte von $\hat{L}_z$.

[2] Nullstellen an den Rändern des Intervalls in dem die Zustände gebunden sind werden dabei nicht mitgezählt.