Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

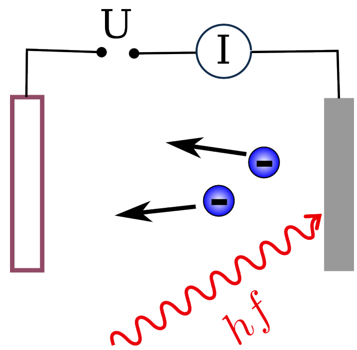
Prof. Dr. Gerd Schön

Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 1

Besprechung 30.04.2014

1. Photoelektrischer Effekt und Gegenfeldmethode (2 Punkte)



Heinrich Hertz stellte im Jahr 1886 fest, dass Elektronen unter dem Einfluss von UV-Strahlung aus einer Metalloberfläche austreten können. Im Jahr 1905 lieferte Albert Einstein die korrekte Erklärung für diesen sogenannten *photoelektrischen Effekt*, was ihm 1921 den Nobelpreis für Physik einbrachte:

"In die oberflächliche Schicht des Körpers dringen Energiequanten ein, und deren Energie verwandelt sich wenigstens zum Teil in kinetische Energie von Elektronen."[1]

Die Energie eines solchen *Energiequants* oder Photons ist gegeben durch hf, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und f die Frequenz des Lichtes ist. Mit Hilfe der sogenannten Gegenfeldmethode (siehe Abbildung) konnte der Zusammenhang zwischen Frequenz und Energie bestimmt werden. Dabei wird eine Metalloberfläche mit Licht der Frequenz f bestrahlt. Elektronen werden aus der Oberfläche gelöst, sofern die Energie des Photons die für das Material charakteristische Austrittsarbeit Φ übersteigt. Sie laufen dann gegen eine Spannung U an.

(a) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen kinetischer Energie der Elektronen, Austrittsarbeit und Energie der Photonen auf.

(b) Im Experiment wird eine Zink-Oberfläche mit Licht der Frequenz $f_1 = 10,6 \cdot 10^{14}$ Hz und $f_2 = 11,6 \cdot 10^{14}$ Hz bestrahlt. Die Spannungen, welche nötig sind, um den Stromfluss durch das Amperemeter auf Null herunterzufahren sind jeweils gegeben durch $U_1 = 0,08$ V und $U_2 = 0,5$ V. Bestimmen sie mit diesen Angaben das Plancksche Wirkungsquantum h in Einheiten von Js und vergleichen Sie mit einem Literaturwert.

[1] A. Einstein: Ueber einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. In: Annalen der Physik. 322, Nr. 6, 1905, S. 132148

2. Delta-Funktion (2 Punkte)

Die Delta-Funktion hat die Eigenschaft, dass

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-a) f(x) \tag{1}$$

für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f. Insbesondere ist sie normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$. Die Dirac-Funktion lässt sich als Grenzfall von Dirac-Folgen δ_ϵ darstellen,

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} \\
&(b) \qquad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \\
&(c) \qquad \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass jede dieser Folgen normiert ist und (1) im Limes $\epsilon \to 0$ erfüllt.

3. Eindimensionale Barriere (6 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Gegeben sei die eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{2}$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ V & , x \geq 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Weiter sei V reell und positiv.

(a) *Stetigkeitsbedingungen*:
Machen sie den Ansatz $\psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t}$ und bringen Sie damit (2) auf eine Eigenwertgleichung für $\phi(x)$. Zeigen Sie, dass $\phi(x)$ und $\partial_x \phi(x)$ stetige Funktionen sind. Integrieren Sie dazu die Eigenwertgleichung für $\phi(x)$ über einen Intervall $(x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon)$ und betrachten Sie den Limes $\epsilon \to 0$.

(b) *Wellenfunktion für $\hbar\omega > V$*:
Im Folgenden betrachten wir eine von links einlaufende ebene Welle, welche teils reflektiert und teils transmittiert wird. Zeigen Sie, dass

$$\phi(x) = \begin{cases} A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} & x < 0 \\ C\, e^{iqx} & x \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

die entsprechende Lösung der Eigenwertgleichung aus (a) ist und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen k, q und ω. Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen für ϕ und $\partial_x \phi$ bei $x = 0$, um den Reflektionskoeffizienten $r = B/A$ und den Transmissionskoeffizienten $t = C/A$ zu berechnen. Bestimmen Sie danach die Stromdichte

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi} \Big[\psi^*(x,t) \partial_x \psi(x,t) - \psi(x,t) \partial_x \psi^*(x,t) \Big] \tag{5}$$

links- und rechtsseitig der Barriere und zeigen Sie, dass $j(x<0,t) = j(x>0,t)$.

(c) *Wellenfunktion für* $\hbar\omega < V$:
Machen Sie erneut den Ansatz (4) und zeigen Sie, dass $q = i\varkappa$ mit $\varkappa \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, dass sich die Koeffizienten A und B nur durch einen Phasenfaktor unterscheiden, d.h. $B/A = e^{i2\varphi}$. Bestimmen Sie die Phase φ und skizzieren Sie diese als Funktion von $\hbar\omega/V$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(d) **Bonus-Aufgabe:** *Totalreflektiertes Wellenpaket*
Betrachten Sie erneut den Fall $\hbar\omega < V$. Ein einlaufendes Wellenpaket

$$\psi_{ein}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i[-\omega(k)t + kx]}$$

mit Impulsverteilung $g(k)$ treffe auf die Barriere. Die Funktion $g(k)$ habe ein scharfes Maximum bei k_0. Bestimmen Sie die Zeitverzögerung Δt, welche mit der Phasenverschiebung in (c) einhergeht. Betrachten Sie hierzu das reflektierte Wellenpaket

$$\psi_{\text{refl}}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i[-\omega(k)t - kx + 2\varphi(k)]}. \tag{6}$$

Der Integrand liefert den größten Beitrag in dem Bereich, in dem der Phasenfaktor $\theta(k) = -\omega(k)t - kx + \varphi(k)$ stationär ist. Zeigen Sie, dass die Zeitverzögerung gegeben ist durch

$$\Delta t = 2 \left.\frac{1}{v_g \varkappa}\right|_{k=k_0}, \tag{7}$$

wobei $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k=k_0}$ die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets ist.