Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I — SS 14

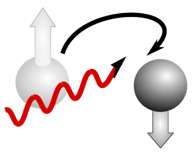
Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 10
Besprechung 09.07.2014

---

1. Spin im elektromagnetischen Feld (4 Punkte)

Wir betrachten einen Spin-$\frac{1}{2}$, mit einer Zeeman-Aufspaltung der Energie $\hbar\omega$, der an eine elektromagnetische Mode mit Frequenz ω koppelt,



$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + g(\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+). \tag{1}$$

Der erste Term beschreibt den Spin mit Grundzustand $|\uparrow\rangle$ mit Grundzustandsenergie $-\frac{\hbar\omega}{2}$ und angeregtem Zustand $|\downarrow\rangle$ mit Energie $\frac{\hbar\omega}{2}$. Der zweite Term beschreibt das monochromatische elektromagnetische Feld mit den Aufsteigern und Absteigern $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ und den Eigenzuständen $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$. Der letzte Term in (1) beschreibt die Kopplung von Spin und elektromagnetischer Mode. Hierbei sind die Matrizen $\hat{\sigma}_\pm$ gegeben durch $\hat{\sigma}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$ und haben die Eigenschaften

$$\sigma_+\,|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\,, \quad \sigma_-\,|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\,, \quad \sigma_+\,|\uparrow\rangle = 0, \quad \sigma_-\,|\downarrow\rangle = 0. \tag{2}$$

Der Hilbertraum des Systems wird aufgespannt durch die Zustände $|\uparrow\rangle\{|n\rangle\}$ und $|\downarrow\rangle\{|n\rangle\}$ mit $\{|n\rangle\} = \{|0\rangle\,, |1\rangle\,, |2\rangle\,, ...\}$.

(a) [2 Punkte] Schreiben Sie (1) in der Basis

$$\{|\uparrow\rangle\,|0\rangle\,, |\uparrow\rangle\,|1\rangle\,, |\downarrow\rangle\,|0\rangle\,, |\uparrow\rangle\,|2\rangle\,, |\downarrow\rangle\,|1\rangle\,, \ldots\,, |\uparrow\rangle\,|n+1\rangle\,, |\downarrow\rangle\,|n\rangle\,, \ldots\}$$

und zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator dargestellt werden kann durch

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & \hat{H}_1 & \hat{\mathbf{0}} & & & \\ & \hat{\mathbf{0}} & \hat{H}_2 & \hat{\mathbf{0}} & & \\ & & \hat{\mathbf{0}} & \ddots & \hat{\mathbf{0}} & \\ & & & \hat{\mathbf{0}} & \hat{H}_n & \hat{\mathbf{0}} \\ & & & & \hat{\mathbf{0}} & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei $\hat{H}_n$ 2×2-Matrizen sind, $\hat{\mathbf{0}} = 0\,\hat{\mathbb{1}}$ und $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie, dass

$$H_{n+1} = \hbar\omega(n+1)\mathbb{1} + g\sqrt{n+1}\hat{\sigma}_x. \tag{3}$$

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie weiter, dass die Anzahl der Anregungen im System $\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger\hat{a} + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ erhalten ist, d.h. $i\hbar\frac{d\hat{N}_e^H}{dt} = -[\hat{H},\,\hat{N}_e^H] = 0$. Interpretieren Sie damit das Resultat, welches Sie in Teilaufgabe (a) erhalten haben.

(c) [1 Punkt]
Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenzustände des Hamilton-Operators (3).

2. Wasserstoffatom im klassischen Strahlungsfeld (3 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem zeitabhängigen elektrischen Feld. Die Wechselwirkung mit diesem elektrischen Feld in der sogenannten Dipolnäherung ist gegeben durch

$$H'(t) = e\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} \cos(\omega t)$$

Im Folgenden wollen wir uns Übergänge von dem Grundzustand des Wasserstoffatoms, $|nlm\rangle = |100\rangle$ in höher angeregte Zustände $|2lm\rangle$ betrachten. Um die Übergangsraten $\Gamma_{|100\rangle\to|2lm\rangle}$ zu berechnen verwenden wir (ohne Herleitung) Fermi's Goldene Regel,

$$\Gamma_{|100\rangle\to|2lm\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 2lm|e\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}|100\rangle|^2 \delta(E_{2lm} - E_{100} - \hbar\omega). \tag{4}$$

Hierbei sind E_{nlm} die Eigenenergien des Wasserstoffatoms und die Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind gegeben durch $\langle r\theta\varphi|nlm\rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$. Parametrisieren Sie zunächst den Wechselwirkungsterm

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{r} = \left[E_x r \sin(\theta)\cos(\varphi) + E_y r \sin(\theta)\sin(\varphi) + E_z r \cos(\theta)\right] \tag{5}$$

durch Kugelflächenfunktionen, berechnen Sie dann alle nichtverschwindenden Matrixelemente $\langle 2lm|e\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}|100\rangle$ und damit $\Gamma_{|100\rangle\to|2lm\rangle}$.

[Hinweis: Benutzen Sie die Relation $\int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r)R_{10}(r) = \frac{a_0}{\sqrt{6}}\frac{2^8}{3^4}$ (a_0 ist der Bohr'sche Radius).]

3. Stern-Gerlach-Experiment mit Präzision (3 Punkte)

Wir betrachten ein Stern-Gerlach-Experiment mit zwei hintereinander folgenden Stern-Gerlach-Apparaten, der erste mit einem Magnetfeld entlang der z-Richtung. Hier wird entweder der Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ präpariert. Der zweite Apparat hat ein Magnetfeld entlang der x-Richtung. Zwischen den Aperaten wird ein homogenes Magnetfeld in y-Richtung angelegt. Jenes führt zu einer Präzision des Spins während der Flugzeit T zwischen den beiden Stern-Gerlach-Apparaten. Berechnen Sie die Intensität der beiden am Detektor-Schirm beobachteten Punkte.