KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

**Blatt 08 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16**

**Prof. Dr. G. Schön**
**Sebastian Zanker, Daniel Mendler**

**20 Punkte**
**Besprechung 08.01.2016**

---

**Abgabe bis spätestens 23.12.2015. Diese Blatt ist nicht mehr relevant für die Übungsklausur.**

## 1. Fourier-Transformation

($2+3+2=7$ Punkte)

In der Vorlesung wurde die Fourier-Transformation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \tag{1}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{-i\omega t} \tag{2}$$

für eine integrierbare Funktion $f(t)$ eingeführt.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ für folgende Funktionen ($t_0, \alpha, \gamma > 0$):

$$\text{(i) } f_1(t) = \Theta(t_0 - |t|), \quad \text{(ii) } f_2(t) = \Theta(t)e^{-\alpha t}, \quad \text{(iii) } f_3(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t}\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}$$

(b) Es sei $g(t)$ eine integrierbare Funktion und $\tilde{g}(\omega)$ ihre Fourier-Transformierte. Zeigen Sie folgende Relationen für die Fourier-Transformationen der Funktionen $g_i$ ($\alpha$ beliebieg):

$$\text{(i)} \quad g_1(t) = g(t-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}_1(\omega) = e^{-i\alpha\omega}\tilde{g}(\omega)$$

$$\text{(ii)} \quad g_2(t) = g(\alpha t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}_2(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\tilde{g}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\text{(iii)} \quad g_3(t) = e^{i\alpha t} g(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}_3(\omega) = \tilde{g}(\omega - \alpha)$$

(c) Sei $h$ nun eine mindestens $n$-mal stetig differenzierbare Funktion mit Fourier-Transformierter $\tilde{h}(\omega)$. Für jede Ableitung $h^{(n)}$ gelte, dass $\lim_{t\to\pm\infty} h^{(n)}(t) = 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$h_n(t) := h^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} h(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{h}_n(\omega) = (i\omega)^n \tilde{h}(\omega)$$

Aus der Differentation im Zeitraum wird also eine einfache Multiplikation im Fourier-Raum.

## 2. Green'sche Funktion

($1+3+1+1+2=8$ Punkte)

Wir betrachten die folgende lineare DGL 1. Ordnung mit Inhomogenität $f(t)$:

$$\mathcal{D}_t^{(1)} v = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right) v = \dot{v} + \alpha v = f(t) \tag{3}$$

In der Vorlesung haben Sie die Methode der *Green'schen Funktion* zur Lösung linearer Differentialgleichungen kennengelernt. Wir wollen nun die Green'sche Funktion des Differentialoperators $\mathcal{D}_t^{(1)}$. bestimmen und damit obige DGL lösen. Die Green'sche Funktion ist eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$\mathcal{D}_t^{(1)} G(t,t') = \delta(t-t'),\ G(t<t') = 0. \tag{4}$$

Da der Differentialoperator $\mathcal{D}_t^{(1)}$ außerdem translationsinvariant bzgl. der Zeit ist (es gibt keinen in $t$ ausgezeichneten Punkt) gilt

$$G(t,t') = G(t-t'). \tag{5}$$

Es genügt daher folgende Gleichung zu lösen:

$$\mathcal{D}_t^{(1)} G(t) = \delta(t),\ G(t<0) = 0. \tag{6}$$

Gehen Sie folgendermaßen vor, um $G(t)$ zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine homogene Lösung von Gleichung (3) und machen Sie damit einen geeigneten Ansatz für $G(t)$.

(b) Integreieren Sie nun Gleichung (6) von $t = -\epsilon$ bis $t = \epsilon$ für ein infinitesimales $\epsilon > 0$ und bestimmen Sie daraus $G(0^+) = \lim_{\epsilon \to 0} G(\epsilon)$.

(c) Bestimmen Sie nun $G(t)$ mittels (a) und (b) und zeigen Sie damit, dass

$$G(t - t') = \Theta(t - t') e^{-\alpha(t-t')}. \tag{7}$$

(d) Finden Sie eine partikuläre Lösung von (3) mit Hilfe der Green'schen Funktion.

(e) Sei nun $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung mit Hilfe von $G(t - t')$.

**3. Harmonischer Oszillator mit Kraftstoß** $(2 + 2 + 1 = 5$ Punkte$)$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine partikuläre Lösung der DGL des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\Delta p}{m}\delta(t) \tag{8}$$

mit Anfangsbedingung $x(t < 0) = 0$ für den Schwingfall ($\gamma < \omega_0$) gegeben ist durch

$$x(t) = \frac{\Delta p}{m\Omega}\Theta(t)e^{-\gamma t}\sin(\Omega t), \text{ mit } \Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \tag{9}$$

(a) Prüfen Sie durch Einsetzen, dass (9) tatsächlich die DGL (8) für den Schwingfall erfüllt.

(b) Finden Sie eine partikuläre Lösung der DGL (8) für den Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$) mit der Bedingung $x(t < 0) = 0$. Fordern Sie außerdem die Stetigkeit von $x(t)$ bei $t = 0$.

(c) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (b) die Green'sche Funktion $G(t, t') = G(t - t')$ für den Kriechfall.

## Informationen zur Übungsklausur

- Die Klausur findet am **Donnerstag, 17.12.2015** von **17:45 bis 19:45 Uhr** im **Audimax** statt. Bitte finden Sie sich gegen **17:30 Uhr** im Hörsaal ein, um einen pünktlichen reibungsfreien Start zu gewährleisten. Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Als einziges Hilfsmittel zugelassen ist ein **einseitig handbeschriebenes DIN-A4 Blatt**.
- **Nicht zugelassen** sind dementsprechend Taschenrechner, Smartphones und sonstige elektronische Hilfsmittel sowie Skripte oder Bücher etc.
- Bitte bringen Sie folgendes zur Klausur mit:
  - Ihren **Studentenausweis** mit Lichtbild
  - Ihre **Matrikelnummer**
  - die **Nummer Ihres Tutoriums**
  - ein paar **Stifte**. Papier wird von uns zur Verfügung gestellt.
- Aufgrund der Klausurkorrektur fallen die Tutorien am **18.12.2015** aus!
- Die **Klausurausgabe** erfolgt in den jeweiligen Tutorien im neuen Jahr. Die Lösung der Klausur wird im Beratungstutorium am Dienstag, 22.12.2015 besprochen sowie online zur Verfügung gestellt.
- Klausurrelevant ist der Stoff der Vorlesung sowie der Übungen bis **einschließlich Blatt 07**.
- Zur Vorbereitung lohnt es sich auf jeden Fall, noch einmal die Übungsblätter durchzugehen sowie alte Klausuren durchzurechnen.