KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Blatt 05 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 27.11.2015**

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Skalar- und Vektorfelder (2 + 3 = 5 Punkte)

(a) Gegeben seien die Skalarfelder $A(\boldsymbol{r})$ und $B(\boldsymbol{r})$ mit $\boldsymbol{r} = (x, y)^\intercal$ und $r = |\boldsymbol{r}|$:

$$A(\boldsymbol{r}) = \frac{y}{a^2 + r^2}, \qquad B(\boldsymbol{r}) = e^{-r^2}$$

Veranschaulichen Sie die Felder durch Skizzieren der Höhenlinien, d.h. Linien mit $A(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$ bzw. $B(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$, in der x-y-Ebene.

(b) Gegeben seien die zweidimensionalen Vektorfelder $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mit $\boldsymbol{r} = (x, y)^\intercal$ und $r = |\boldsymbol{r}|$:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Skizzieren Sie die Vektoren $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ in der x-y-Ebene (es ist hilfreich, zunächst Linien mit konstantem Betrag zu zeichnen). Zeichnen Sie außerdem jeweils für die Vektorfelder Skizzen der Feldlinien, d.h. die Linien, die in Richtung der Vektoren verlaufen.

2. Harmonischer Oszillator (1 + 2 + 1 + 1 + 3 = 8 Punkte)

Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators lautet $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_{0,x}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des harmonischen Oszillators mit dem komplexen Exponentialansatz $x_1(t) = A_1^+ e^{i\omega_0 t} + A_1^- e^{-i\omega_0 t}$. Bestimmen Sie die Konstanten $A_1^\pm$.

(b) Drücken Sie die Lösung durch sin und cos auf die folgenden Arten aus:

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)\,, \quad x_3(t) = A_3 \sin(\omega_0 t + \phi_3)\,, \quad x_4(t) = B_4 \sin(\omega_0 t) + C_4 \cos(\omega_0 t)$$

Bestimmen Sie die Konstanten A_i, ϕ_i, B_4 und C_4.

(c) Entsprechend kann man auch den invertierten harmonischen Oszillator betrachten mit der Gleichung $\ddot{y}(t) - \lambda_0^2 y(t) = 0$. Bestimmen Sie die Lösungen mit dem reellen Exponentialansatz $y_1(t) = A_1^+ e^{\lambda_0 t} + A_1^- e^{-\lambda_0 t}$. Bestimmen Sie die Konstanten $A_1^\pm$. Die Anfangsbedingungen seien $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = v_{0,y}$.

(d) Drücken Sie die Lösung durch sinh und cosh auf die folgenden Art aus:

$$y_2(t) = B_2 \sinh(\lambda_0 t) + C_2 \cosh(\lambda_0 t)$$

Bestimmen Sie die Konstanten B_2 und C_2.

(e) Betrachten Sie eine Kugel der Masse m, die auf einer unebenen Fläche umherrollt. Die Kraft auf die Kugel kann durch ein Kraftfeld der folgenden Form beschrieben werden

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\alpha x, \beta y)^\intercal\,. \tag{1}$$

Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie die Gleichung mittels der vorherigen Teilaufgaben. Die Anfangsbedingungen sind $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{v}_0$. Betrachten Sie alle Fälle $\alpha, \beta \lesseqgtr 0$. *Bonusfrage*: Welche Form hat die Fläche, auf der die Kugel umherrollt für die einzelnen Fälle $\alpha, \beta \lesseqgtr 0$?

3. Lineare Differentialgleichung (3 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die homogene, lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} - 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 3y = 0. \tag{2}$$

(a) Lösen Sie die DGL mittels des Exponentialansatzes $e^{\lambda x}$ wie beim harmonischen Oszillator. Setzen Sie dazu den Ansatz in die DGL ein. Für eine DGL 4. Ordnung erwarten wir vier linear unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung lässt sich als Linearkombination dieser Lösungen schreiben, also $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots$

(b) Wie sieht dann die allgemeine *reelle* Lösung aus?

(c) Bestimmen Sie nun $a_1, \dots, a_4$, sodass $y(x)$ das folgende Anfangswertproblem löst:

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 1$$