Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

**Blatt 00 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16**

**Prof. Dr. G. Schön**
**Sebastian Zanker, Daniel Mendler**

**0 Punkte**
**Besprechung 23.10.2015**

---

**Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden.**

## 1. Differentialrechnung

Wir bezeichnen mit $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ die $n-$te Ableitung $f^{(n)}(x)$ der Funktion $f(x)$ nach $x$, also z.B. $f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ für die erste und $f''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$ für die zweite Ableitung. Berechnen Sie:

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$ (ii) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x\sqrt{x-2}\right)$

(iii) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\cos\left(at^2\right)\right)$ (iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x \ln x}\right)$

## 2. Integralrechnung

Eine *Stammfunktion* $F$ zu einer gegebenen Funktion $f$ erfüllt $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$. Stammfunktionen zur selben Funktion $f$ unterscheiden sich nur in einer additiven Konstante. Das Finden einer Stammfunktion kann als Umkehr der Differentiation verstanden werden:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x')\mathrm{d}x'$$

wobei $a$ ein (reeller) Parameter ist, der die additive Konstante festlegt. Oft findet man auch die Kurzschreibweise $\int f(x)\mathrm{d}x$. Anstelle des Begriffes Stammfunktion ist auch die Bezeichnung "unbestimmtes Integral von $f$" gebräuchlich.

(a) Finden Sie alle Stammfunktionen zu $f(t) = \cos(\omega t)$ und $g(x) = e^{-x/b}$.

(b) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitutionsregel oder partieller Integration:

(i) $\int \frac{2x}{(x^2-b)^n}\mathrm{d}x, \quad n \neq 1$ (ii) $\int x\, e^x \mathrm{d}x$

(c) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral (*Hinweis:* Nutzen Sie zuerst eine geeignete Substitution und integrieren Sie anschließend partiell).

$$I = \int_0^T t \sin\left(\omega^2 t^2\right) \cos\left(\omega^2 t^2\right) \mathrm{d}t$$

## 3. Vektorrechnung

Für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ lässt sich ein Skalar- und ein Kreuzprodukt definieren.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Häufig werden statt $x, y, z$ ganzzahlige Indizes verwendet, da dies zu höherdimensionalen Vektorräumen verallgemeinert. Praktisch ist auch die Einsteinsche Summenkonvention, bei der implizit über gleiche Indizes summiert wird, z.B. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i = a_i b_i$. Gegeben seien drei Vektoren $\boldsymbol{a} = (-3, 4, 1)^\intercal$, $\boldsymbol{b} = (5, 2, -1)^\intercal$ und $\boldsymbol{c} = (0, 1, 7)^\intercal$, wobei das kleine $\intercal$ die Transposition bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Beträge $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ und $|\boldsymbol{c}|$ und normieren Sie die Vektoren.

(b) Wie können Sie feststellen, ob die Vektoren voneinander linear unabhängig sind? Sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig?

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit dem Skalarprodukt. Welchen Wert hat das Skalarprodukt für orthogonale Vektoren? Zerlegen Sie den Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\parallel + \boldsymbol{a}_\perp$ in die zwei Anteile $\boldsymbol{a}_\perp$ und $\boldsymbol{a}_\parallel$, wobei $\boldsymbol{a}_\perp$ orthogonal zu $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}_\parallel$ parallel zu $\boldsymbol{b}$ ist.

(d) Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1) \text{ oder } (3,1,2), \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) = (1,3,2),\ (3,2,1) \text{ oder } (2,1,3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kann das Kreuzprodukt dargestellt werden. Zeigen Sie $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention. Welchen Vektor liefert das Kreuzprodukt für zwei parallele Vektoren? Bestimmen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts die Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, welches von den drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ aufgespannt wird.

(e) Die drei Vektoren können als Punkte angesehen werden, die eine Ebene im Raum definieren. Die Punkte einer Ebene $\boldsymbol{x}$ erfüllen die Ebenengleichung in Hesse'scher Normalform $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = d$ mit einem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) und dem Abstand der Ebene $d$ zum Ursprung. Berechnen Sie $\boldsymbol{n}$ und $d$.