Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 2
Besprechung 07.05.2014

---

1. Normierung und Kontinuität (2 Punkte)

Gegeben sei die eindimensionale Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial_t\psi(x,t) = H(x,t)\psi(x,t)$ mit dem orts- und zeitabhängigen Hamilton-Operator $H(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x,t)$ und $V(x,t) = V^*(x,t)$.

(a) (1 Punkt) Ein beliebiger Zustand $\psi(x,t_0)$ sei zum Zeitpunkt t_0 normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t_0)|^2 = 1$. Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2$ zeitunabhängig ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ lokal erhalten, d.h. die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho(x,t) + \partial_x J(x,t) = 0$$

erfüllt ist. Hierbei wird die Wahrscheinlichkeitsstromdichte definiert durch $J(x,t) = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\big[\psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\partial_x\psi(x,t)\big]$.

2. Wellenpaket und Unschärferelation (3 Punkte)

Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit Impulsverteilung

$$g(k) = \sqrt{a}\exp(-a^2k^2/4)/(2\pi)^{1/4}.$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i(kx-\omega_k t)},$$

wobei $\omega_k = \hbar k^2/2m$.

(a) (1 Punkt) Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x,0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte. Wie hängt diese von a ab?

(b) (1 Punkt) Die Standard-Abweichungen in Ort und Impuls seien definiert durch $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ bzw. $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$, wobei

$$\langle A\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t)\, A\, \psi(x,t)$$

der Erwartungswert des Operators A ist. Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\Delta x\Delta p = \hbar/2$.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun $\psi(x,t)$ für beliebige t und diskutieren Sie das Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$ mit der Zeit. Was erhalten Sie jetzt für $\Delta x\Delta p$?

3. Delta-Potenziale (5 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Im Folgenden lösen wir die eindimensionale Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m und Energie E im Potenzial $V(x)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

(a) (3 Punkte) Betrachten Sie das Delta-Potenzial $V(x) = -v_0\delta(x)$ mit $v_0 > 0$.

(i) Leiten Sie analog zur Aufgabe 3 (a) auf dem ersten Blatt die Anschlussbedingungen für ψ und $\partial_x\psi$ bei $x = 0$ her.

(ii) Zunächst sei $E < 0$. Zeigen Sie, dass ein gebundener Zustand existiert und dessen Energie gegeben ist durch $E = -mv_0^2/2\hbar^2$.

(iii) Ein Teilchen mit $E > 0$ laufe von links ein, das analog zu Blatt 1 teils reflektiert und teils transmittiert wird. Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten und zeigen Sie, dass die transmittierte Welle eine Phase aufsammelt. Diskutieren Sie den Grenzfall $E \to \infty$.

(b) (2 Punkte) Gegeben sei ein Doppel-Delta-Potenzial $V(x) = -v_0[\delta(x + a/2) + \delta(x - a/2)]$ mit $v_0 > 0$. Lösen Sie die eindimensionale Schrödinger-Gleichung und zeigen Sie, dass

$$e^{-\kappa a} = \pm\left(1 - \frac{\hbar^2\kappa}{mv_0}\right), \tag{1}$$

wobei $E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$ die Energie des Teilchens und $\kappa \in \mathbb{R}$ ist. Lösen Sie die tranzendente Gleichung (1) graphisch.

(c) *Resonanztunneln* (**1 Bonuspunkt**):
Nun sei $E > 0$ und $V(x) = v_0[\delta(x + a/2) + \delta(x - a/2)]$ mit $v_0 > 0$. Welche Bedingung muss $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ erfüllen, damit der Reflexionskoeffizient der Barriere verschwindet?