Blatt 3, Aufgabe 1

$r^* t' + t^* r' = 0$ wird gelöst durch

$\Rightarrow |r||t'| - |t||r'| = 0$

wenn $\rho - \tau = \tau' - \rho' + \pi(2n+1)$

Streumatrix für einen Kanal Wir schreiben die S-Matrix als

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix},$$

wobei $t = |t|e^{i\tau}$, $t' = |t'|e^{i\tau'}$, $r = |r|e^{i\varrho}$ und $r' = |r'|e^{i\varrho'}$.

Aus der Unitarität von S ergeben sich Beziehungen zwischen den Matrixelementen

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} r^* & t^* \\ t'^* & r'^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |r|^2+|t|^2 & r^*t'+t^*r' \\ t'^*r+r'^*t & |t'|^2+|r'|^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gelten $|r|^2+|t|^2 = 1 = |t'|^2+|r'|^2$ und $r^*t'+t^*r' = 0$. Die letztere Beziehung liefert $|r||t'| = |t||r'|$ und $-\varrho+\tau' = -\tau+\varrho'+\pi(2n+1)$ mit $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Weiterhin liefert

$$SS^\dagger = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^* & t^* \\ t'^* & r'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |r|^2+|t'|^2 & rt^*+t'r'^* \\ tr^*+r't'^* & |r'|^2+|t|^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $|r|^2+|t'|^2 = 1$ und $rt^*+t'r'^* = 0$. Daraus folgt mit den aus vorherigen Beziehungen, dass $|r|^2 = |r'|^2$, $|t|^2 = |t'|^2$ und $\varrho-\tau = \tau'-\varrho'+\pi(2n+1)$.

Somit sind nur τ, ϱ, ϱ' sowie $|t| = \sqrt{1-|r|^2}$ freie Parameter. Die S-Matrix lässt sich als umschreiben

$$S = \begin{pmatrix} |r|e^{i\varrho} & -|t|e^{i(\varrho+\varrho')-i\tau} \\ |t|e^{i\tau} & |r|e^{i\varrho'} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\varrho+\varrho'}{2}}\begin{pmatrix} |r|e^{i\frac{\varrho-\varrho'}{2}} & -t^*e^{i\frac{\varrho+\varrho'}{2}} \\ te^{-i\frac{\varrho+\varrho'}{2}} & |r|e^{-i\frac{\varrho-\varrho'}{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Streumatrix im 1-Kanal-Fall kann also immer in folgender Form darstellt werden

$$S = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} r & -t^* \\ t & r^* \end{pmatrix}.$$

Blatt 3, Aufgabe 2

$$\{a_n, a_n^+\} = 1$$

$$a_n^+ a_n = 1 - a_n a_n^+$$

$$\{a_n, a_{n'}^+\} = 0$$

$$\Rightarrow a_n a_{n'}^+ = - a_{n'}^+ a_n$$

$$G^{(2)}(r_1, r_2, t, t) = \varepsilon_k^4 \langle (a_k^+ e^{-ikr_1} + a_{k'}^+ e^{-ik'r_1})(a_k^+ e^{-ikr_2} + a_{k'}^+ e^{-ik'r_2}) \cdot$$

$$\cdot (a_k e^{ikr_2} + a_{k'} e^{ik'r_2})(a_k e^{ikr_1} + a_{k'} e^{ik'r_1}) \rangle$$

nur relevante Terme übrig

$$= \varepsilon_k^4 \langle a_k^+ a_k^+ a_k a_k + a_{k'}^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_{k'}$$

$$+ (a_k^+ a_{k'}^+ e^{-ikr_1 - ik'r_2} + a_{k'}^+ a_k^+ e^{-ik'r_1 - ikr_2})$$

$$(a_k a_{k'} e^{ikr_2 + ik'r_1} + a_{k'} a_k e^{ik'r_2 + ikr_1}) \rangle$$

$$= \varepsilon_k^4 \langle a_k^+ a_k^+ a_k a_k + a_{k'}^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_{k'}$$

$$+ a_k^+ a_{k'}^+ a_k a_{k'} e^{-i(k-k')(r_1 - r_2)}$$

$$+ a_k^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_k$$

$$+ a_{k'}^+ a_k^+ a_k a_{k'}$$

$$+ a_{k'}^+ a_k^+ a_{k'} a_k e^{i(k-k')(r_1 - r_2)} \rangle$$

bringe in Ordnung $a_k^+ a_k a_{k'}^+ a_{k'}$ oder $k \leftrightarrow k'$

$$a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k = \delta_{kk'}$$

Fermionen $\{a_k, a_{k'}^+\} = \delta_{kk'}$

$$= \varepsilon_k^4 \langle \pm a_k^+ a_k a_k^+ a_k \mp a_k^+ a_k \pm a_{k'}^+ a_{k'} a_{k'}^+ a_{k'} \mp a_{k'}^+ a_{k'}$$

$$\pm a_k^+ a_k a_{k'}^+ a_{k'} e^{-i(k-k')(r_1 - r_2)}$$

$$+ a_k^+ a_k a_{k'}^+ a_{k'}$$

$$+ a_{k'}^+ a_{k'} a_k^+ a_k$$

$$\pm a_{k'}^+ a_{k'} a_k^+ a_k e^{i(k-k')(r_1 - r_2)} \rangle$$

$$G^{(2)} = \mathcal{E}_k^4 \Big| -1 + 1 - 1 + 1 - e^{-i(\dots)} + 1 + 1 - e^{i(\dots)} \Big|$$

$$= 2\,\mathcal{E}_k^4 \left(1 - \cos\left((k-k')(r_1 - r_2)\right)\right)$$

$$G^{(2)} = \mathcal{E}_k^4 \Big\langle \pm a_k^\dagger a_k a_k^\dagger a_k \mp a_k^\dagger a_k \pm a_{k'}^\dagger a_{k'} a_{k'}^\dagger a_{k'} \mp a_{k'}^\dagger a_{k'}$$
$$\pm a_k^\dagger a_k a_{k'}^\dagger a_{k'} \; e^{-i(k-k')(r_1-r_2)}$$
$$+ a_k^\dagger a_k a_{k'}^\dagger a_{k'}$$
$$+ a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k^\dagger a_k$$
$$\pm a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k^\dagger a_k \; e^{i(k-k')(r_1-r_2)} \Big\rangle$$

Angenommen k und k' gleich angeregt und unabhängig voneinand

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \langle n_k \rangle = \langle n \rangle$$

$$\langle a_k^\dagger a_k a_k^\dagger a_k \rangle = \langle n_k^2 \rangle = \langle n^2 \rangle$$

$$\langle a_k^\dagger a_k a_{k'}^\dagger a_{k'} \rangle = \langle n_k n_{k'} \rangle = \langle n_k \rangle \langle n_{k'} \rangle = \langle n \rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t, t) = 2\mathcal{E}_k^4 \Big[\pm \langle n^2 \rangle \mp \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \big(1 \pm \cos(\vec{k}-\vec{k}')(\vec{r}_1$$