Aufgabe 1:

$$i\partial_t |\psi\rangle = (H_0 + H_1(t))|\psi\rangle$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z$$

$$H_1(t) = \Omega_R \sigma_x \cos(\omega t + \varphi)$$

$$U = e^{-i\omega \sigma_z t/2} \quad (\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U^\dagger \sigma_+ U = \frac{i\omega}{2} U^\dagger [\sigma_z, \sigma_+] U = i\omega U^\dagger \sigma_+ U$$

$$\Rightarrow U^\dagger \sigma_+ U = \sigma_+ e^{i\omega t}$$

a)

$$|\psi\rangle = U|\psi_R\rangle$$

$$i\partial_t|\psi\rangle = i\dot{U}|\psi_R\rangle + iU\partial_t|\psi_R\rangle$$

$$= (H_0 + H_1(t))U|\psi_R\rangle$$

$$i\partial_t|\psi_R\rangle = \left[U^\dagger(H_0 + H_1(t))U - iU^\dagger\dot{U}\right]|\psi_R\rangle$$

$$i\dot{U} = -\frac{\omega\sigma_z}{2}U$$

$$\Rightarrow i\partial_t|\psi_R\rangle = H_R|\psi_R\rangle$$

$$H_R = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\sigma_z + \frac{1}{2}\Omega_R(\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi})$$

b) $\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi}$

$$= \sigma_x \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi$$

$$e^{ia(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} = \mathbb{I}\cos a + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin a$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad a = \frac{\Omega_R}{2} t$$

$$\Rightarrow e^{iH_R t} = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right) + \begin{pmatrix} 0 & i\cos\varphi + \sin\varphi \\ i\cos\varphi - \sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right)$$

$$|\psi_R\rangle = U^\dagger |\psi\rangle$$

$$|-_R\rangle = U^\dagger |-\rangle = e^{i\omega t/2} |-\rangle = e^{i\omega t/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{iH_R t} |-_R\rangle$$

$$= e^{i\omega t/2} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right)(i\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \cos\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right) \end{pmatrix}$$

$$= |-_R(t)\rangle$$

at $t_1 = \frac{\pi}{2}\frac{2}{\Omega_R}$

$$|-_R(t_1)\rangle = e^{i\omega t_1/2}\, i e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad //$$

Aufg 2)

$$\{c_\lambda, c^\dagger_{\lambda'}\}|\psi\rangle = (c_\lambda c^\dagger_{\lambda'} + c^\dagger_{\lambda'} c_\lambda)|\psi\rangle = c^\dagger_{\lambda'} c_\lambda |\psi\rangle + c_\lambda c^\dagger_{\lambda'} |\psi\rangle$$
$$= c^\dagger_{\lambda'} \delta_{n_\lambda,1} (-1)^{\sum_{\nu<\lambda} n_\nu} |\psi^\lambda_{n_\lambda=0}\rangle + c_\lambda \delta_{n_{\lambda'},0} (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu} |\psi^{\lambda'}_{n_{\lambda'}=1}\rangle$$

Hier verwende ich die Notation $|\psi^\lambda_{n_\lambda=1(0)}\rangle$. Dies bedeutet das der Zustand n_λ bestezt (unbesetzt) ist.

$$\begin{aligned}
\{c_\lambda, c^\dagger_{\lambda'}\}|\psi\rangle &= c^\dagger_{\lambda'}\delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda} n_\nu}|\psi^\lambda_{n_\lambda=0}\rangle + c_\lambda\delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu}|\psi^{\lambda'}_{n_{\lambda'}=1}\rangle && (16)\\
&= \delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'} n'_\nu}\delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda} n_\nu}|\psi_{n_\lambda=0,n_{\lambda'}=1}\rangle && (17)\\
&\quad +\delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda} n'_\nu}\delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu}|\psi_{n_{\lambda'}=1,n_\lambda=0}\rangle && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}$$

Hier bedeutet ν^λ bzw. $\nu^{\lambda'}$ das jeweils über die Konfiguration summiert wird nachdem ein Teilchen in Zustand n_λ ($n_{\lambda'}$) erzeugt (vernichtet) wurde.

Wir betrachten nun den Fall $\lambda > \lambda'$. Damit gilt $(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'} n'_\nu} = (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n'_\nu}$. Damit lässt sich schreiben,

$$\begin{aligned}
(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda} n_\nu} &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu<\lambda} n_\nu} && (20)\\
&= (-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu<\lambda} n_\nu} && (21)\\
(-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu} &= (-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda'} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu^{\lambda'}<\lambda} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu} && (22)\\
&= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda} n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'} n_\nu} && (23)\\
&= (-1)^{\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda} n'_\nu} && (24)
\end{aligned}$$

Wenn wir nun die Summen über ν und $\nu^{\lambda'}$ vergleichen ist der unterschied dadurch gegeben das für die Summe über $\nu^{\lambda'}$ gilt $n_{\lambda'} = 1$ anstat $n_{\lambda'} = 0$ anstat. Damit ergibt sich

$$\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda} n_{\nu^{\lambda'}} = \sum_{\lambda'<\nu<\lambda} n_\nu + 1 \qquad (25)$$

Es ist damit leicht zu sehen das

$$\{c_\lambda, c^\dagger_{\lambda'}\} = 0 \qquad (26)$$

für $\lambda > \lambda'$. Genauso lässt sich für alle anderen fälle Argumentieren.

3) $H = \frac{1}{2} \sum_{pp'q} \sum_{\sigma\sigma'} V(q)\, c^{\dagger}_{p+q,\sigma}\, c^{\dagger}_{p'-q,\sigma'}\, c_{p'\sigma'}\, c_{p\sigma}$

$\langle p_1' \sigma_1, p_2' \sigma_2 | H | p_1 \sigma_1, p_2 \sigma_2 \rangle = x$

Beitrag $p = p_1,\ p' = p_2$ $(\sigma_1 \neq \sigma_2)$ oder $p = p_2,\ p' = p_1$ (Faktor 2)

$p + q = p_1',\quad p' - q = p_2'$

$p_1 + q = p_1' \qquad p_2 - q = p_2'$

$\Rightarrow \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$

$p_1 - p_1' = p_2' - p_2$

oder $(\sigma_1 = \sigma_2)$

$\Rightarrow c^{\dagger}_{p+q\sigma}\, c_{p'-q\sigma'}\, c_{p'\sigma'}\, c_{p\sigma} \to -1$

$p' - q = p_1 \Rightarrow p_2 - q = p_1$

$$\Rightarrow \quad x = \left[V(p_1' - p_1) - \delta_{\sigma_1 \sigma_2} V(p_2' - p_1) \right] \delta_{p_1' + p_2',\, p_1 + p_2}$$