

Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik“

1 Relationen für statistische Größen (6 Punkte)

Wenn A eine Gauss-verteilte Größe ist, gilt

$$\langle A^n \rangle = (n-1) \langle A^2 \rangle \langle A^{n-2} \rangle. \quad (1)$$

Zeigen sie dass daraus folgt,

$$\langle \exp(A) \rangle = \exp \left[\frac{1}{2} \langle A^2 \rangle \right]. \quad (2)$$

Stellen sie dazu eine Differentialgleichung auf für $\langle \exp(\lambda A) \rangle$.

2 1/f-Rauschen (7 Punkte)

Die Funktion $X(t)$ sei eine klassische stochastische Variable. Sie ist charakterisiert durch die Korrelationsfunktion und das Rauschspektrum

$$\langle X(t)X(0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} S(\omega), \quad (3)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ das Ensemble-Mittel der Funktion ist. Hier haben wir Translationsinvarianz in der Zeit angenommen.

Häufig findet man 1/f Rauschen. D.h. die Spektralfunktion ist gegeben durch

$$S(\omega) = \frac{E_{1/f}^2 \Theta(\omega - \omega_{\min})}{\omega}. \quad (4)$$

Für ein 2-Niveau-System unter dem Einfluss einer klassischen stochastischen Variable die an σ_z koppelt gilt (wie in der Vorlesung gezeigt)

$$\rho_{ab}(t) = e^{-i\omega_{ab}t} \rho_{ab}(0) e^{i \int_0^t X(t') dt'}. \quad (5)$$

Berechnen sie $\langle \rho_{ab}(t) \rangle$, wobei $X(t)$ Gauss-verteilt ist. Benutzen sie dazu

$$\int_{\omega_{\min}}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega t)}{\omega^3} \approx -\frac{1}{2} t^2 (-3 + 2\gamma + 2 \log(2\omega_{\min} t)), \quad (6)$$

das Ergebnis aus Aufgabe 1 und nehmen sie an, dass Ensemble-Mittlung und Integration über die Zeit vertauschen.

3 Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung**(7 Punkte)**

Nehmen sie an das die Bewegungsgleichung einer Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems gegeben ist durch,

$$\dot{\rho} = -i\frac{1}{2}\omega_{ab}[\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{ab}}{2} (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) + \frac{\gamma_{ba}}{2} (2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+). \quad (7)$$

Dabei gilt,

$$\sigma_+|a\rangle = 0, \quad \sigma_-|a\rangle = |b\rangle, \quad \sigma_-|b\rangle = 0, \quad \sigma_+|b\rangle = |a\rangle. \quad (8)$$

- a) (3 Punkte) Finden und lösen sie die Bewegungsgleichung für das Matrixelement $\rho_{ab}(t)$.
- b) (4 Punkte) Finden und lösen sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für die Matrixelemente $\rho_{aa}(t)$ und $\rho_{bb}(t)$