Übungsblatt Nr. 2 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik“

1 Das zeitabhängige 2-Zustandssystem (Rabi-Oszillationen) (9 Punkte)

Wir betrachten ein getriebenes 2-Zustandssystem. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t|\psi\rangle = (H_0 + H(t))|\psi\rangle \ . \tag{1}$$

Der Hamilton-Operator besteht aus zwei Teilen. Einem zeitunabhängigen Teil, $H_0 = \omega_0\sigma_z/2$ mit den Eigenzuständen $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$, und einen zeitabhängigen Teil,

$$H(t) = \Omega_R\sigma_x \cos\left[\omega t + \varphi\right] \ . \tag{2}$$

a) (5 Punkte) Transformieren sie die Schrödinger-Gleichung in ein rotierendes Bezugssystem, mit dem Ansatz

$$|\psi\rangle = U|\psi_R\rangle \, , \quad U = e^{-i\omega\sigma_z t/2} \, . \tag{3}$$

Verwenden sie die Rotating-Wave-Approximation und definieren sie einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator.

b) (4 Punkte) Nehmen sie an, dass $\omega = \omega_0$. Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|-\rangle$ im rotierenden Bezugssystem.

2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (6 punkte)

Für einen Fermionischen Vielteilchenzustand sind die Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren definiert durch,

$$c^\dagger_\lambda|n_1,\dots,n_\lambda=0,\dots\rangle = (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\dots,n_\lambda=1,\dots\rangle \tag{4}$$
$$c_\lambda|n_1,\dots,n_\lambda=1,\dots\rangle = (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\dots,n_\lambda=0,\dots\rangle \tag{5}$$
$$c^\dagger_\lambda|n_1,\dots,n_\lambda=1,\dots\rangle = c_\lambda|n_1,\dots,n_\lambda=0,\dots\rangle = 0 \tag{6}$$

Zeigen sie damit, dass die die Operatoren c_λ und $c^\dagger_\lambda$ die Antivertauschungsrelation

$$\{c_\lambda, c^\dagger_{\lambda'}\} = \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{7}$$

erfüllen.

3 Zweite Quantisierung (5 Punkte)

Der Hamiltom Operator für Elektronen-Elektronen Wechselwirkung kann in 2ter Quantisierung geschrieben werden als,

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}\sum_{\sigma\sigma'} V(\mathbf{q})c^\dagger_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}c^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}\sigma'}c_{\mathbf{p}'\sigma'}c_{\mathbf{p}\sigma} \tag{8}$$

wobei $c_{\mathbf{p}\sigma}$ der Vernichtungsoperatoren eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{p}$ und Spin σ ist. Zeigen sie, dass gilt,

$$\langle\mathbf{p}'_1\sigma_1, \mathbf{p}'_2\sigma_2|H|\mathbf{p}_1\sigma_1, \mathbf{p}_2\sigma_2\rangle = \left[V(\mathbf{p}'_1-\mathbf{p}_1) - \delta_{\sigma_1\sigma_2}V(\mathbf{p}'_2-\mathbf{p}_1)\right]\delta_{\mathbf{p}'_1+\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2} \, . \tag{9}$$