

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

Blatt 7

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Besprechung, 31.05.2013

1. Dichteoperator für Spin-1/2 Systeme: 5 Punkte

Wir betrachten ein Ensemble von Spin-1/2 Teilchen mit Hamilton-Operator (pro Spin) $H = -\frac{\Delta E}{2}\sigma_z$ und den Eigenzuständen $|\pm\rangle$, mit $\pm|\pm\rangle$. Konstruieren Sie dafür die Dichteoperatoren für

- (1 Punkt) ein Ensemble von reinen $|+\rangle$ -Zuständen,
- (2 Punkte) ein Ensemble von reinen $|+\rangle_x$ -Zuständen ($|\pm\rangle_x = (|+\rangle \pm |-\rangle)/\sqrt{2}$),
- (1 Punkt) ein gemischtes Ensemble, das zu gleichen Teilen $|+\rangle_x$ und $|-\rangle_x$ -Zustände enthält.
- (1 Punkt) Berechnen sie für die Ensemble in Aufgabenteil b) und c) den Erwartungswert $\langle\sigma_x\rangle$ für einen Spin des Ensembles.

2. Reduzierte Dichtematrix: 8 Punkte

Betrachten Sie zwei Spin-1/2 Teilchen im Singulett-Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (1)$$

- (4 Punkte) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ d.h. $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$. Überprüfen Sie explizit, dass es sich bei Ihrem Ergebniss um einen reinen Zustand handelt.
- (4 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass uns nur der erste Spin als Messgröße interessiert. Bestimmen Sie dessen reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin 'ausspüren': $\rho_{\sigma_1, \sigma'_1}^{\text{red}} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma_2}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^{\text{red}}$ einen gemischten Zustand beschreibt (obwohl $\hat{\rho}$ rein ist).

3. Bewegungsgleichung der Dichtematrix: 4 Punkte

Wir betrachten einen Hamilton-Operator H mit den Eigenzuständen $|i\rangle$, und den Eigenenergien E_i , $H|i\rangle = E_i|i\rangle$. Berechnen sie die Zeitenwicklung der Dichtematrix $\hat{\rho}$ indem die quantenmechanische Liouville-Gleichung in der Basis der Eigenzustände des Hamilton-Operators lösen.

4. Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix: 3 Punkte

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld, beschrieben durch den Hamilton Operator $H = B_z\sigma_z/2$. Berechnen sie die Zeitenwicklung der Dichtematrix $\hat{\rho}$ unter der Annahme das zum Zeitpunkt $t = 0$ das System in einem reinen Zustand $|+\rangle_x = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ ist.