# Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

**Prof. Dr. G. Schön**
**Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke**

**Blatt 12**
**Besprechung 12.07.2013**

---

**1. Elektron-Phonon-Streuung** (1+3+3+5+2=14 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Stoßraten für die Elektron-Elektron-Streuung betrachtet. Analog soll hier die Elektron-Phonon-Streuung untersucht werden. Diese wird durch den Hamilton-Operator

$$H_{el-ph} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma,\lambda} g^{el-ph}_{\mathbf{q},\lambda} c^\dagger_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma} c_{\mathbf{p},\sigma} (a_{\mathbf{q},\lambda} + a^\dagger_{-\mathbf{q},\lambda})$$

beschrieben. (Notation siehe Skript.)
Im Folgenden werden dabei Phononen im Debeyemodell betrachtet ($\hbar\omega_\mathbf{q} = c|\mathbf{q}|$) mit der Annahme, daß alle Äste $\lambda$ die gleiche Schallgeschwindigkeit und Kopplungskonstante $g_\lambda$ haben.

(a) Erläutern Sie warum die Lebensdauer eines Elektrons im Zustand $\mathbf{p}\sigma$ bei der Streuungen an Phononen durch die Rate

$$\tau^{-1}_{\mathbf{p}\sigma} = \sum_{\mathbf{p}'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{p}'\sigma})\big)(W^+_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} + W^-_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma})$$

bestimmt ist.

(b) Zunächst müssen die Raten $W^+_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}$ ($W^-_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}$) für die Streuung von Elektronen von $\mathbf{p}\sigma$ nach $\mathbf{p}'_1\sigma$ unter Absorption (Emission) eines Phonons bestimmt werden. Betrachten Sie die Matrixelemente

$$\langle n_{\mathbf{p}\sigma} = 0, n_{\mathbf{p}'\sigma} = 1, n_{\mathbf{q}\lambda} \mp 1 | H_{el-ph} | n_{\mathbf{p}\sigma} = 1, n_{\mathbf{p}'\sigma} = 0, n_{\mathbf{q}\lambda}\rangle\,,$$

und zeigen Sie, daß damit die Streuraten durch

$$W^\pm_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{q},\lambda} |g^{el-ph}_{\mathbf{q},\lambda}|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_\mathbf{p} \mp \hbar\omega_\mathbf{q})\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} \mp \mathbf{q}) \begin{Bmatrix} n_\mathbf{q} \\ n_\mathbf{q}+1 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

gegeben sind.

(c) Ersetzen Sie nun $n_\mathbf{q}$ durch die thermischen Besetzungszahlen $N_\mathbf{q} = \langle n_\mathbf{q}\rangle$ und zeigen Sie, daß dann $W^+_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}/W^-_{\mathbf{p}'\sigma\to\mathbf{p}\sigma}$ der Bedingung des detailierten Gleichgewichts genügt.

(d) Berechnen Sie nun $\tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma}$. Für die Kopplungskonstante soll dabei $g^{el-ph}_{\mathbf{q},\lambda} = g_0\sqrt{\omega_\mathbf{q}/\omega_D}$ angenommen werden.

*Hinweis*: Beachten Sie bei der Energieerhaltung das $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ bei $\varepsilon_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q}} \equiv \varepsilon(|\mathbf{k}\pm\mathbf{q}|)$ Vektoren sind. Berücksichtigen Sie bei der Integration über die $\delta$-Funktion die innere Ableitung.

(e) Zeigen Sie, dass $\tau^{-1}_\varepsilon(T=0) \propto (\varepsilon - \varepsilon_\mathrm{F})^3$ und dass für $k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega_D$ gilt $\tau^{-1}_{\varepsilon_\mathrm{F}}(T) \propto T^3$
.

**2. Tight-Binding-Modell** (4+2=6 Punkte)

Die Eigenschaften von Festkörpern werden dominiert durch ihre periodische Gitterstruktur. Gittermodelle sind damit ein naheliegender Ansatz der Modellierung dieser Systeme. Ein einfaches dieser Modelle ist das Tight-Binding-Modell zur Beschreibung von Leitungselektronen:
Fermionen auf einem Gitter werden dabei beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle \mathbf{r},\mathbf{r}' \rangle} \sum_{\sigma} c^{\dagger}_{\mathbf{r},\sigma} c_{\mathbf{r}',\sigma} + h.c. \qquad t > 0,$$

mit fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $c^{\dagger}, c$ und dem „Hopping-Matrixelement“ $t$. $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$ bezeichnet die Summation über benachbarte Gitterplätze, $\sigma$ den Spin.

(a) Betrachten Sie eine eindimensionale Kette mit der Gitterkonstante $a$, die Gitterplätze sind damit gegeben durch $\mathbf{r} = a \cdot n_x \quad (n_x = 1, 2, \ldots, N; N \to \infty)$. Bringen Sie den Hamilton-Operator auf die Form

$$H = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon(\mathbf{k}) c^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} c_{\mathbf{k},\sigma}$$

und bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\varepsilon(k_x)$.

(b) Betrachten Sie nun ein 3-dimensionales kubisches Gitter mit Gitterkonstante $a$, mit den $N^3$ Gitterplätzen $\mathbf{r} = (an_x, an_y, an_z)$. Bringen Sie den Hamilton-Operator wie oben auf Diagonalform und bestimmen Sie auch für diesen Fall die Dispersionsrelation (Bandstruktur) $\varepsilon(\mathbf{k})$ .