

## Übungen zur Theoretischen Physik F SS 13

Prof. Dr. G. Schön  
Dr. M. MarthalerBlatt 1  
Besprechung, 19.04.2013

## 1. Funktionaldeterminanten:

10 Punkte

Die Funktionen  $u = u(x, y)$  und  $v = v(x, y)$  sind Funktionen der unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$ . Für diese Funktionen lässt sich die Funktionaldeterminante auf folgende Art und Weise definieren:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \end{pmatrix}.$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie nun, dass folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, x)} & \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}}. \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  durch  $\phi(x, y) = \text{const} = z$  gegeben, der eine Abhängigkeit  $y = y(x)$  herstellt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_\phi = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_\phi \right)^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_\phi = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_y}{\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_x}.$$

(Bem.: Oft schreibt man in der obigen Beziehungen einfach  $z = z(x, y)$  und ersetzt  $\phi$  überall durch  $z$ ).

(c) (3 Punkte) Wir betrachten nun drei Variablen, die eine Bedingung  $F(x, y, z) = 0$  erfüllen. Zusätzlich erfüllen zwei der Variablen eine weitere Bedingung  $w = w(x, y)$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial w} \Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial w} \Big|_z, \quad \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_w + \frac{\partial x}{\partial w} \Big|_y \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_z.$$

**2. Integrabilitätsbedingung:****4 Punkte**

Eine Form

$$\delta\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

heißt integrabel wenn eine Funktion  $h(x, y)$  existiert, deren vollständiges Differential  $dh$  identisch mit  $\delta\omega$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_y$$

erfüllt ist.

Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

- (a) (2 Punkte)  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy - y^2$  und  $g(x, y) = -x^2 - 2xy + y^2$ ,  
(b) (2 Punkte)  $f(x, y) = 3x + y$  und  $g(x, y) = -x - 3y$ ,

$\delta\omega$  integrabel ist. Falls  $\delta\omega$  integrabel ist, bestimmen Sie  $h(x, y)$ .

**3. Legendre-Transformation:****6 Punkte**

Gegeben sei eine Kurve  $U(S)$  in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten  $S$  und  $U$  die Steigung  $T = dU/dS$  sowie den  $U$ -Achsenabschnitt  $F$  der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion  $F(T)$  heißt Legendre-Transformierte zu  $U(S)$ . Auflösen der (obigen) Beziehung  $T = T(S)$  nach  $S$  definiert eine Funktion  $S = S(T)$ .

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale der Kurve und ihrer Legendre-Transformierten durch

$$dU(S) = T(S)dS \quad \text{und} \quad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

- (b) (4 Punkte) Gegeben sei nun eine Fläche  $U(S, V)$  mit positiver Steigung bezüglich  $S$ , negativer Steigung bezüglich  $V$  und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes  $V$  bzw. für konstant gehaltenes  $S$  durch. Die Steigungen seien durch  $T = \partial U / \partial S|_V$  sowie  $-P = \partial U / \partial V|_S$  gegeben. Auflösen von  $T(S, V)$  nach  $S$  und  $P(S, V)$  nach  $V$  definiert die Funktionen  $S(T, V)$  und  $V(S, P)$ . Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendre-Transformierten  $F(T, V)$  und  $H(S, P)$ . Die Funktionen  $U(S, V)$ ,  $F(T, V)$  und  $H(S, P)$  entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.