Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

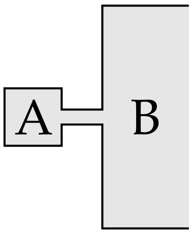
Prof. Dr. G. Schön

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Lösungsvorschlag zu Blatt 6

24.05.2013

1. Master-Gleichung:



Übergangsrate:

$$W(n,m) = \gamma\frac{n}{\Omega}\delta_{n,m+1} + \gamma\rho\delta_{n,m-1};$$

$$W(m,n) = \gamma\frac{m}{\Omega}\delta_{m,n+1} + \gamma\rho\delta_{m,n-1}$$

Proportionalitätskonstante γ im folgenden weggelassen, $[\gamma] = m^3 s^{-1}$

(a) Mastergleichung:

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \sum_m \{W(m,n)P(m,t) - W(n,m)P(n,t)\}$$

$$= \frac{n+1}{\Omega}P(n+1,t) + \rho P(n-1,t) - \left(\frac{n}{\Omega} + \rho\right) P(n,t)$$

$$P(-1,t) := 0$$

Stationärer Fall,

$$\text{MG:} \quad 0 = \frac{n+1}{\Omega}x_{n+1} + \frac{\rho}{x_n} - \frac{n}{\Omega} - \rho, \quad \text{mit } x_n := \frac{P(n)}{P(n-1)}$$

$$(n+1)x_{n+1} - \Omega\rho = n - \frac{\Omega\rho}{x_n} = \frac{nx_n - \Omega\rho}{x_n}$$

Lösung für allen n: $nx_n - \Omega\rho = 0$, also
$P(n) = \frac{\Omega\rho}{n}P(n-1)$ und $P(n) \sim \frac{(\Omega\rho)^n}{n!}$ $\Rightarrow$ Poisson!

(b)

$$\frac{\partial\langle n\rangle}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n[(n+1)P(n+1,t) - nP(n,t)]}{\Omega} + \sum_{n=0}^{\infty} n\rho[P(n-1,t) - P(n,t)]$$

(Wechsel von Indizes)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-n)}{\Omega}P(n,t) + \sum_{n=0}^{\infty}\rho P(n,t) = -\frac{1}{\Omega}\langle n\rangle + \rho$$

Variation der Konstanten:

$$\langle n(t)\rangle = \langle n(0)\rangle e^{-\frac{1}{\Omega}t} + e^{-\frac{1}{\Omega}t}\int_0^1 d\tau e^{\frac{1}{\Omega}\tau}\rho = \left(\langle n(0)\rangle - \Omega\rho\right)e^{-\frac{1}{\Omega}t} + \Omega\rho$$

2. Langevin-Gleichung:

(a)

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} - \dot{I}_0 = \delta\dot{I} \qquad \longrightarrow \qquad \left[-\omega^2 C + i\frac{\omega}{R} + \frac{1}{L}\right]V - i\omega I_0 = +i\omega\delta I$$

Also

$$I = (I_0 + \delta I) = \frac{1}{i\omega}\left[-\omega^2 C + \frac{i\omega}{R} + \frac{1}{L}\right]V = \frac{V}{Z(\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad Z(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2 C + \frac{i\omega}{R} + \frac{1}{L}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}$$

(b)

$$\langle V(\omega)V(\omega')\rangle = Z(\omega)Z(\omega')\langle I(\omega)I(\omega')\rangle =$$

$$= Z(\omega)Z(\omega')\left(I_0(\omega)I_0(\omega') + I_0(\omega)\underbrace{\langle\delta I_0(\omega')\rangle}_{=0} + I_0(\omega')\underbrace{\langle\delta I_0(\omega)\rangle}_{=0} + \langle\delta I_0(\omega)\delta I_0(\omega')\rangle\right) =$$

$$= Z(\omega)Z(\omega')\left(I_0(\omega)I_0(\omega') + \langle\delta I_0(\omega)\delta I_0(\omega')\rangle\right)$$

$$\langle\delta I(\omega)\delta I(\omega')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' e^{i(\omega t + \omega' t')}\langle\delta I(t)\delta I(t')\rangle = \frac{2k_B T}{R}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega+\omega')t} = \frac{4\pi k_B T}{R}\delta(\omega+\omega')$$

$$\Rightarrow \quad \langle\delta V(\omega)\delta V(\omega')\rangle = Z(\omega)Z(\omega')\langle\delta I(\omega)\delta I(\omega')\rangle = Z(\omega)Z(-\omega)\frac{4\pi k_B T}{R}\delta(\omega+\omega')$$

$$= \frac{4\pi k_B T}{R}\frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\delta(\omega+\omega') = \pi\delta(\omega+\omega')S_V(\omega)$$

$$\longrightarrow \quad S_V(\omega) = \frac{4k_B T}{R\left[\frac{1}{R^2} + (\omega C - (\omega L)^{-1})^2\right]} = \frac{4k_B T}{R\left|\frac{1}{R} + i(\omega C - (\omega L)^{-1})\right|^2}$$

(c)

$$\langle\delta V(t)\delta V(t')\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' e^{i(\omega t + \omega' t')}\langle\delta V(\omega)\delta V(\omega')\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' e^{i(\omega t + \omega' t')}S_V(\omega)\delta(\omega+\omega') = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}S_V(\omega)$$

$$= \frac{k_B T R}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}\frac{\omega^2}{|\omega + i\left(\omega^2 RC - R/L\right)|^2}$$

$$= \frac{k_B T}{\pi R C^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}\frac{\omega^2}{\left|\omega^2 - \frac{1}{LC} - \frac{i\omega}{RC}\right|^2}$$

$$= \frac{k_B T}{\pi R C^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \frac{\omega^2}{\left[\omega - \left(\frac{i}{2RC} + \sqrt{\Delta}\right)\right]\left[\omega - \left(\frac{i}{2RC} - \sqrt{\Delta}\right)\right]}$$

$$\times \frac{1}{\left[\omega - \left(-\frac{i}{2RC} + \sqrt{\Delta}\right)\right]\left[\omega - \left(-\frac{i}{2RC} - \sqrt{\Delta}\right)\right]}$$

mit $\Delta = -\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC} > 0$.

$$\text{Integriere mit Residuensatz: } \begin{cases} t > t' & \to \text{oben schließen} \\ t < t' & \to \text{unten schließen} \end{cases}$$

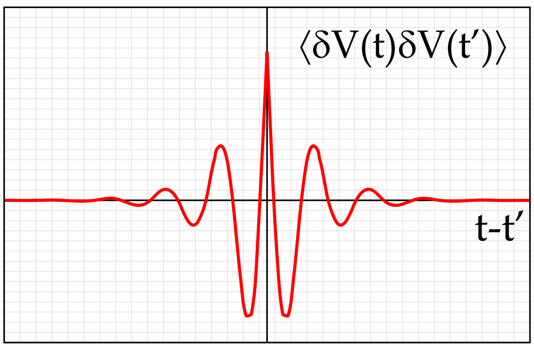
$$\xrightarrow{t>t'} \quad \langle \delta V(t) \delta V(t') \rangle$$

$$= \frac{k_B T}{\pi R C^2} 2\pi i e^{-\frac{t-t'}{2RC}} \left\{ e^{i(t-t')\sqrt{\Delta}} \frac{\left(\sqrt{\Delta} + \frac{i}{2RC}\right)^2}{2\sqrt{\Delta}\frac{i}{RC}\left(\frac{i}{RC} + 2\sqrt{\Delta}\right)} + e^{-i(t-t')\sqrt{\Delta}} \frac{\left(-\sqrt{\Delta} + \frac{i}{2RC}\right)^2}{-2\sqrt{\Delta}\frac{i}{RC}\left(\frac{2i}{2RC} - 2\sqrt{\Delta}\right)} \right\}$$

$$= \frac{k_B T}{2C\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{t-t'}{2RC}} \left\{ \left(\sqrt{\Delta} + \frac{i}{2RC}\right) e^{i(t-t')\sqrt{\Delta}} + \left(\sqrt{\Delta} - \frac{i}{2RC}\right) e^{-i(t-t')\sqrt{\Delta}} \right\}$$

$$= \frac{k_B T}{C} e^{-\frac{t-t'}{2RC}} \left\{ \cos[(t-t')\sqrt{\Delta}] - \frac{1}{RC\sqrt{\Delta}} \sin[(t-t')\sqrt{\Delta}] \right\}$$

Analog $t < t' \longrightarrow \langle \delta V(t) \delta V(t') \rangle = \frac{k_B T}{C} e^{-\frac{|t-t'|}{2RC}} \left\{ \cos[(t-t')\sqrt{\Delta}] - \frac{1}{RC\sqrt{\Delta}} \sin[|t-t'|\sqrt{\Delta}] \right\}$



3. Fokker-Planck-Gleichung:

(a) Wir gehen aus von der Langevin-Gleichung, die sich aus der Summe der Ströme bei der Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator ergibt:

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = \delta I(t)$$

Die Lösung läuft nun analog zum Abschnitt 3.5.1. aus der Vorlesung:
Die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung V lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(V,t) = -\frac{\partial}{\partial V}\left[\alpha^{(1)}(V,t)\rho(V,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}\left[\alpha^{(2)}(V,t)\rho(V,t)\right]$$

Wir integrieren zunächst die obige Langevin-Gleichung über eine kurze Zeit Δt:

$$V(t+\Delta t) - V(t) = -\frac{V}{RC}\Delta t + \frac{1}{C}\int_t^{t+\Delta t} dt'\delta I(t')$$

Dann ergibt sich das 1.Moment:

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)}(V,t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle V(t+\Delta t) - V(t)\rangle \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\langle -\frac{V}{RC}\Delta t + \frac{1}{C}\int_t^{t+\Delta t} dt'\delta I(t')\right\rangle \\
&= -\frac{V}{RC} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{C\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt'\langle\delta I(t')\rangle
\end{aligned}$$

δI soll Nyquist-Rauschen beschreiben, also gilt $\langle\delta I(t)\rangle = 0$ und damit schließlich:

$$\alpha^{(1)}(V,t) = -\frac{V}{RC}$$

Das 2.Moment ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\alpha^{(2)}(V,t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\langle [V(t+\Delta t) - V(t)]^2\right\rangle \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\mathcal{O}(\Delta t^2) - \frac{2V}{RC}\Delta t\int_t^{t+\Delta t} dt'\langle\delta I(t')\rangle + \frac{1}{C^2\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt'dt''\langle\delta I(t')\delta I(t'')\rangle\right)
\end{aligned}$$

Mit Nyquist-Rauschen, $\langle\delta I(t)\rangle = 0$ und $\langle\delta I(t)\delta I(t')\rangle = \frac{2k_BT}{R}\delta(t-t')$, folgt dann:

$$\alpha^{(2)}(V,t) = \frac{2k_BT}{RC^2}$$

Somit lautet die Fokker-Planck-Gleichung dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho(V,t) &= -\frac{\partial}{\partial V}\left[-\frac{V}{RC}\rho(V,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2}\left[\frac{2k_BT}{RC^2}\rho(V,T)\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{RC}\left(\rho(V,t) + V\frac{\partial\rho(V,t)}{\partial V} + \frac{k_BT}{C}\frac{\partial^2\rho(V,t)}{\partial V^2}\right)}
\end{aligned}$$

(b) Stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k_BT}{C}\frac{\partial^2\rho}{\partial V^2} + V\frac{\partial\rho}{\partial V} + \rho$$

Analog zum entsprechenden Beispiel aus der Vorlesung erhalten wir als Lösung:

$$\boxed{\rho(V) \propto e^{-\frac{CV^2}{2k_BT}}}$$