Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 13

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenike

Lösungsvorschlag zu Blatt 2
26.04.2013

---

1. Ideales Gas:

(a)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \stackrel{\text{Blatt1}}{=} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}_{-P} + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}_{T} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}_{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{(Maxwell)}}$$
$$= -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0$$

Wobei im letzten Schritt $PV = NkT$ in die partielle Ableitung eingesetzt wurde.

(b)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \Rightarrow \mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T \mathrm{d}T$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V$$

$$\Rightarrow dU = C_V dT$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{P}{T}\mathrm{d}V = C_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + Nk\frac{\mathrm{d}V}{V}$$
$$S = S_0 + C_V\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} + Nk\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V} \stackrel{C_V=\frac{f}{2}Nk}{=} S_0 + Nk\left[\frac{f}{2}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\right]$$

(c)

$$\mathrm{d}S = C_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + Nk\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$
$$0 = \mathrm{d}(\underbrace{C_V}_{\frac{f}{2}Nk}\ln T + Nk\ln V) = Nk\mathrm{d}\left(\ln\left[T^{\frac{f}{2}}V\right]\right)$$
$$\Rightarrow T^{\frac{f}{2}}V = \text{const.} \stackrel{PV=NkT}{\Longrightarrow} P^{\frac{f}{f+2}}V = \text{const.}$$

(d)

Die Änderung der Entropie divergiert für den Fall, dass man das ideale Gas auf $T = 0\text{K}$ abkühlen möchte. Dies steht im Widerspruch zu den Haupsätzen der Thermodynamik!

(e)

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \overset{\text{Blatt1}}{=} T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}_{\text{Maxwell:}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{Nk}{V} = \frac{P}{T}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}_{=\frac{Nk}{P}}\right] = \underbrace{C_V}_{=\frac{f}{2}Nk} + Nk$$

$$\text{mit: } T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V$$

$$\Rightarrow C_P = \frac{2+f}{2}R > C_V$$

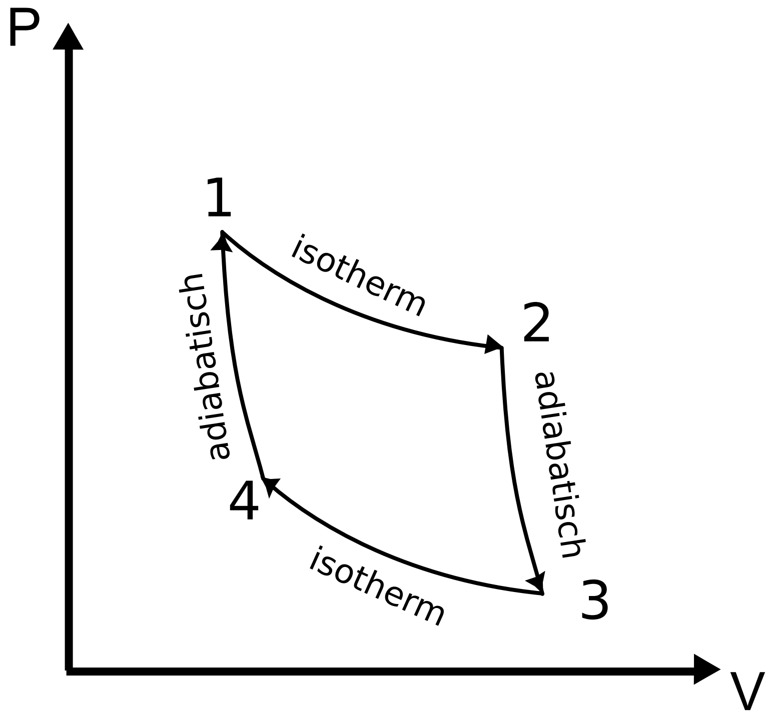
$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{P}$$

Mit der Adiabaten-Gleichung folgt:

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = -\left(\frac{\partial}{\partial P}\underbrace{\ln V}_{\text{const.}-\frac{f}{2+f}\ln P}\right)_S = \frac{f}{f+2}\frac{1}{P} < \kappa_T$$

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{2+f}{f} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

2. Carnot-Maschine mit idealem Gas:

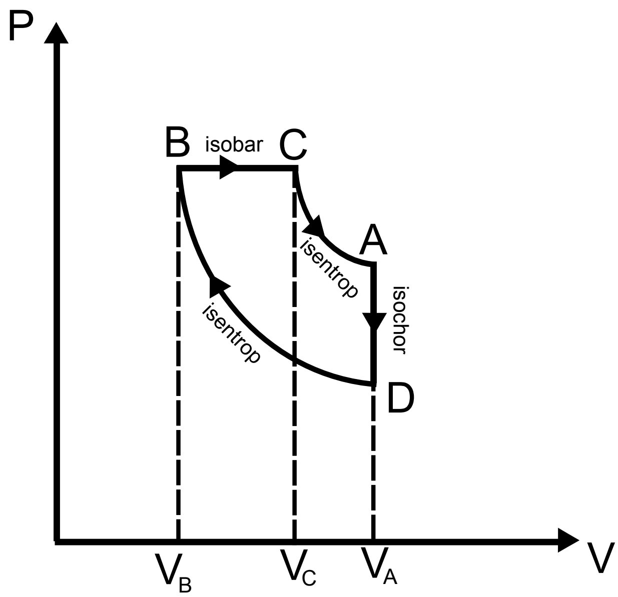


$$1 \to 2, 3 \to 4: \text{ isotherm} \Rightarrow \mathrm{d}U = 0$$
$$\Rightarrow \delta Q = T\mathrm{d}S = P\mathrm{d}V = NkT\frac{\mathrm{d}V}{V}$$
$$\Rightarrow Q_{12} = NkT_{>} \ln\frac{V_2}{V_1}\ ,\ Q_{34} = NkT_{<} \ln\frac{V_4}{V_3}$$

$$2 \to 3, 4 \to 1: \text{ adiabatisch} \Rightarrow VT^{\frac{f}{2}} = \text{const.}$$
$$\Rightarrow V_2 T_{>}^{\frac{f}{2}} = V_3 T_{<}^{\frac{f}{2}}\ ,\ V_1 T_{>}^{\frac{f}{2}} = V_4 T_{<}^{\frac{f}{2}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$
$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{|Q_{12}|} = 1 - \frac{T_{<}}{T_{>}}\frac{\ln\frac{V_3}{V_4}}{\ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_{<}}{T_{>}}$$

Aus dem linearen Zusammenhang zwischen den Temperaturen wird ersichtlich, dass es sich bei der durch den Carnot-Prozess festgelegten Temperaturskala um die Kelvinskala handelt.

3. Kreisprozess eines Dieselmotors:



(a)

$$S(T,V) = \left[C_V \ln \frac{T}{T_0} + Nk \ln \frac{V}{V_0} \right] + S_0$$

$$PV = NkT\ ,\ P_0 V_0 = NkT_0 \quad \rightsquigarrow \frac{V}{V_0} = \frac{P_0}{P} \frac{T}{T_0}$$

$$\begin{aligned} S(T,P) &= \left[C_V \ln \frac{T}{T_0} + Nk \ln \left(\frac{P_0}{P} \frac{T}{T_0} \right) \right] + S_0 = \left[(C_V + Nk) \ln \frac{T}{T_0} + Nk \ln \frac{P_0}{P} \right] + S_0 \\ &= \left[\underbrace{(C_V + Nk)}_{C_P} \ln \frac{T}{T_0} - Nk \ln \frac{P}{P_0} \right] + S_0 \end{aligned}$$

isobare: $P = \text{const.}$

$$S(T) = \text{const.} + C_P \ln \frac{T}{T_0} \leftrightsquigarrow T(S) \sim \mathrm{e}^{S/C_P}$$

isochore: $V = \text{const.}$

$$S(T) = \text{const.} + C_V \ln \frac{T}{T_0} \leftrightsquigarrow T(S) \sim \mathrm{e}^{S/C_V}$$

(b)

$$Q_{BC} = \int_B^C T \mathrm{d}S = C_P \int_B^C \mathrm{d}T = C_P \left(T_C - T_B \right)$$

$$_{DA} = \int_D^A T \mathrm{d}S = C_V \int_D^A \mathrm{d}T = C_V \left(T_A - T_D \right)$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{|Q_{BC}|} = 1 - \frac{C_V}{C_P} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$