

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 13

Prof. Dr. G. Schön

Lösungsvorschlag zu Blatt 1

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenike

19.04.2013

1. Funktionaldeterminanten:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y \quad \text{Def. der Determinante}$$

(a)

1. $v(x, y) = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x = 1, \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y$
2. $u(x, y) = x \Rightarrow \text{analog } \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x$
3. folgt trivial aus Determinanteneigenschaft (Vertauschen von $u \leftrightarrow v$ oder $x \leftrightarrow y$ vertauscht Vorzeichen)
- 4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial(u(s(x, y), t(x, y)), v(s(x, y), t(x, y)))}{\partial(x, y)} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_t \left(\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y \right) + \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_s \left(\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_t \left(\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_s \left(\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \right) \end{aligned}$$

1. und 4. Term sind Null. 2. und 3. Term ergeben

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \Big|_t \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_s - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_t \right) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_x - \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_y \right) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}$$

Durch Umbenennen von $x, y \rightarrow s, t$ und $s, t \rightarrow x, y$ folgt

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \xrightarrow{\text{auflösen}} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}}$$

(b)

Die erste Relation spiegelt einfach den *Satz der lokalen Umkehrbarkeit* aus Analysis wieder. Z.B. so: Sei $\phi(x, y) = \text{const.}$, also $x(y)$. Dann ist das Differential $dx(y) = \frac{\partial x}{\partial y} dy$. Andererseits ist aber $dy(x) = \frac{\partial y}{\partial x} dx$. Einsetzen liefert dann $dx = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} dx$, also $1 = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$. Und daraus folgt schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1}.$$

Da wir ja von Anfang an $\phi = \text{const.}$ angenommen haben, dürfen wir auch noch bei beiden partiellen Ableitungen die ϕ 's dazuschreiben und erhalten das gesuchte Resultat.

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{\phi} = \frac{\partial(y, \phi)}{\partial(x, \phi)} = \frac{\partial(y, \phi)}{\partial(y, x)} \frac{\partial(y, x)}{\partial(x, \phi)} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_y \frac{1}{\frac{\partial(x, \phi)}{\partial(x, y)}} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_y}{\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_x}$$

{Hier wird $\phi = \phi(x, y) = \text{const.}$ als unabhängige Variable aufgefasst, d. h. $y = y(x, \phi)$ }.

(c)

Wir betrachten x und z als unabhängige Variable, so dass $y = y(x, z)$. Das erfolgt durch Auflösen von $F(x, y, z) = 0$ nach y . Das Differential für y ist dann

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z dx + \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x dz$$

Weiterhin ist $w = w(x, y)$, also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_y dx + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x dy.$$

Wir substituieren $y(x, z)$ für y in $w(x, y)$, und erhalten als Differential für $w(x, z)$:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z \right) dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_z = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z. \quad (1)$$

Analog erhalten wir aus dem Differential für $w(x(y, z), y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_z = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z. \quad (2)$$

Wir eliminieren $\partial w / \partial y \Big|_x$ (d.h. Gl. (2) in Gl. (1) einsetzen), und erhalten

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_z = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z.$$

Wir lösen nun $w = w(x, y)$ nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und w , d.h. $x = x(y, w)$. Wir erhalten

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_w dy + \frac{\partial x}{\partial w} \Big|_y dw$$

Die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ lösen wir nach x auf, betrachten also x als Funktion von y und z , und erhalten daraus $w = w(x(y, z), y)$. Das Differential für $w(y, z)$ ist

$$dw = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_z dy + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_y dz.$$

Wir substituieren dies in die Gleichung für dx und erhalten schließlich

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = \left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_w + \left. \frac{\partial x}{\partial w} \right|_y \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_z.$$

2. Integrabilitätsbedingung:

(a)

$$\begin{aligned} f &= 3x^2 - 2xy - y^2 & g &= -x^2 - 2xy + y^2 \\ \partial_y f &= -2x - 2y & \partial_x g &= -2x - 2y \end{aligned}$$

Also gilt: $\partial_y f = \partial_x g$, $\Rightarrow \omega$ ist integrabel.

Herleitung von $h(x, y)$:

1. Suche $F(x, y)$ mit $\partial_x F = f$
2. Bestimme $\varphi(y)$, so dass $\partial_y \varphi = g - \partial_y F$
3. $h(x, y) = F(x, y) + \varphi(y)$

$$\text{Hier: } F(x, y) = x^3 - x^2y - y^2x \Rightarrow \partial_y F = -x^2 - 2xy$$

$$\partial_y \varphi = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{3}y^3$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x, y) = x^3 - x^2y - y^2x + \frac{1}{3}y^3}$$

(b)

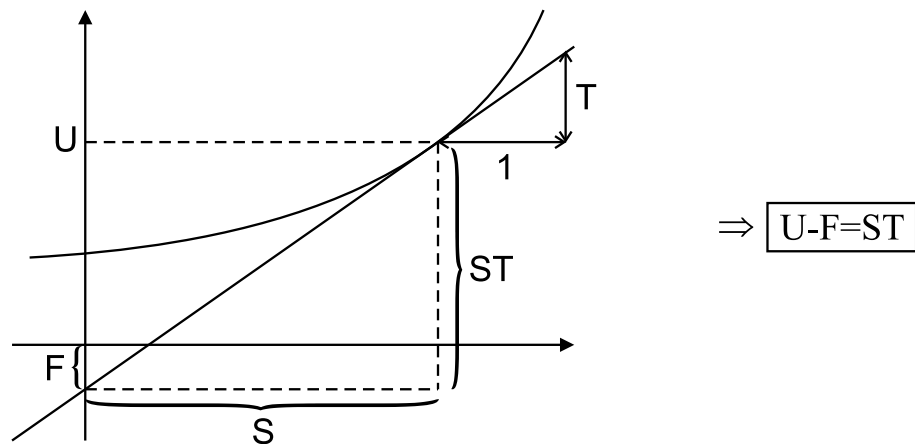
$$f = 3x + y \Rightarrow \partial_y f = 1 \quad \text{und} \quad g = -x - 3y \Rightarrow \partial_x g = -1$$

Also

$$\partial_y f \neq \partial_x g, \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ ist nicht integrabel}.$$

3. Legendretransformation:

(a)



$$U = U(S), \text{ Steigung } T = \frac{\partial U}{\partial S} \Rightarrow S = S(T) \quad \boxed{dU(S) = \frac{\partial U}{\partial S} dS = T(S) dS}$$

$$F = F(T) = U(S(T)) - S(T)T,$$

$$dF(T) = \left[\overbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}^T \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T} T - S(T) \right] dT \Rightarrow \boxed{dF(T) = -S(T) dT}$$

(b)

$$U(S, V), \quad T = \left. \frac{\partial U(S, V)}{\partial S} \right|_V \Rightarrow S(T, V)$$

$$-P = \left. \frac{\partial U(S, V)}{\partial V} \right|_S \Rightarrow V(S, P)$$

$$dU(S, V) = T(S, V) dS - P(S, V) dV \quad \text{Innere Energie}$$

analog zu a):

$$F(T, V) = U(S(T, V), V) - S(T, V)T \quad \text{Freie Energie,}$$

$$dF(T, V) = -S(T, V) dT - P(S, (T, V), V) dV$$

$$H(S, P) = U(S, V(S, P)) + V(S, P)P \quad \text{Enthalpie,}$$

$$dH(S, P) = T(S, V(S, P)) dS + V(S, P) dP$$