Rechnung: Vom Gatter der QFT zur mathematischen Darstellung

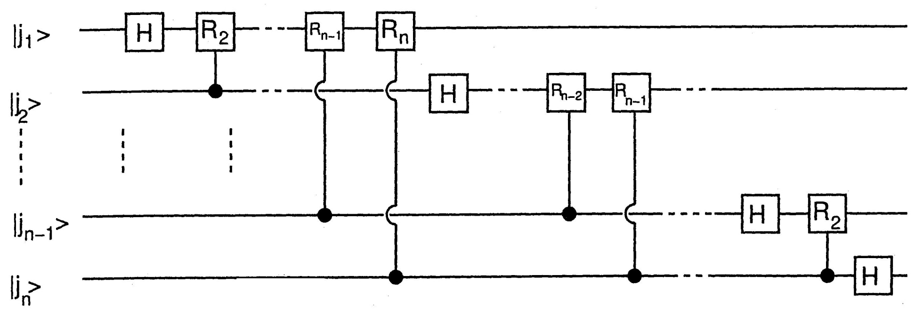

Figure 1: Gatter der QFT, aus: J. Stolze, D. Suter: Quantum Computing. A Short Course from Theory to Experiment, Wiley (2008)

Die einzelnen Gatter sind dabei folgendermaßen definiert:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i \cdot 2^{-k}) \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit dem Zustand $|j\rangle = |j_1 j_2 ... j_n\rangle$, wobei $j = \sum_{i=1}^{n} j_i 2^{n-i}$.

Im ersten Schritt werden die Gatter nur auf $|j_1\rangle$ angewendet:

$$|j\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_1 + e^{i\pi j_1} |1\rangle_1 \right] |j_2 j_3 ... j_n\rangle$$

$$\xrightarrow{R_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_1 + \exp\left(2\pi i \cdot (\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2}) \right) |1\rangle_1 \right] |j_2 j_3 ... j_n\rangle$$

$$\xrightarrow{R_3 ... R_n} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_1 + \exp\left(2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m} \right) |1\rangle_1 \right] |j_2 j_3 ... j_n\rangle$$

Nun werden alle Gatter angewendet:

$$|j\rangle \to 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle_l + \exp\left(2\pi i \sum_{m=1}^{n-l+1} j_m 2^{-m} \right) |1\rangle_l \right]$$

Ein Umkehren der Indizes der Zustände $|j_l\rangle$ (in der Grafik nicht zu sehen) liefert

$$2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle_l + \exp\left(2\pi i \sum_{m=1}^{l} j_{n-l+m} 2^{-m} \right) |1\rangle_l \right]$$

Wir verwenden die Periodizität der Exponentialfunktion und die Definition von j und erhalten schließlich

$$2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle_l + \exp\left(2\pi i j 2^{-l} \right) |1\rangle_l \right]$$