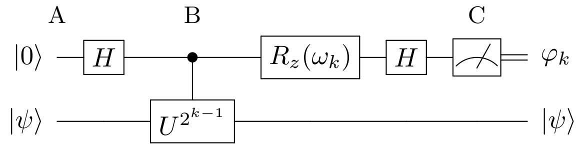
Iterative Phase Estimation Algorithm (Tafelanschrieb)



Wir wollen die Phase, die sich durch Anwendung eines Operators U auf einen Zustand $|\psi\rangle$ ergibt, bestimmen, also $U\,|\psi\rangle = e^{2\pi \mathrm{i}\varphi}\,|\psi\rangle$.

Annahme Die Phase habe exakt m binäre Stelle $\varphi_i = 0, 1$ und lässt sich somit schreiben als

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\varphi_k = [0, \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_{m-1}\varphi_m 000\dots]_2\,. \tag{1}$$

Wir betrachten im Folgenden nur das Hilfs–Qbit, da sich die Register–Qbits, die $|\psi\rangle$ darstellen, nicht ändern.

$$A \to B: \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{U_C^{2^{k-1}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{2\pi\mathrm{i}\left(2^{k-1}\varphi\right)}\end{pmatrix} \tag{2}$$

Iterationsstart bei $k = m$

$$2^{m-1}\varphi = \sum_{k=1}^{m} 2^{(m-1)-k}\varphi_k = \frac{\varphi_m}{2} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m-2} 2^j \varphi_{m-1-j}}_{\text{ganze Zahl}} \tag{3}$$

$$\Rightarrow e^{2\pi\mathrm{i}\left(2^{k-1}\varphi\right)} = e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_m}{2}} \tag{4}$$

Für den ersten Iterationsschritt ist $\omega_m = 0$.

$$B \to C: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_m}{2}}\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 + e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_m}{2}}\\ 1 - e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_m}{2}}\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{4}\left|1 + e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_m}{2}}\right|^2 = \cos^2\left(\pi\frac{\varphi_m}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \varphi_m = 0\\ 0, & \text{für } \varphi_m = 1\end{cases} \tag{6}$$

Unter der Annahme das φ maximal m Stellen hat, können wir also durch eine Messung des Hilfs–Qbits im ersten Iterationsschritt φ_m sicher bestimmen.

Nächster Schritt $k = m - 1$ Jetzt ergibt sich

$$2^{m-2}\varphi = \frac{\varphi_{m-1}}{2} + \frac{\varphi_m}{4} + \text{ganze Zahl}\,, \tag{7}$$

sodass wir für die Rotation

$$\omega_{m-1} = -2\pi\frac{\varphi_m}{4} = -2\pi\,[0, 0\varphi_m]_2 \tag{8}$$

wählen. Damit erhalten wir

$$B \to C: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\varphi_{m-1}}{2} + \frac{\varphi_m}{4}\right)}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_z(\omega_{m-1})} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\varphi_{m-1}}{2}}\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \dots\ (\text{analog})\,, \tag{9}$$

und eine Messung des Hilfs–Qbits ergibt die nächste Stelle φ_{m-1} der Phase.

Allgemein Führen wir die Iteration bis $k = 1$ mit

$$\omega_k = -2\pi\sum_{j=k+1}^{m} 2^{k-j-1}\varphi_j = -2\pi\,[0, 0\varphi_{k+1}\varphi_{k+2}\dots\varphi_m]_2 \tag{10}$$

durch, erhalten wir die vollständige Phase φ deterministisch.