Als Beispiel eines kontinuierlichen Fehlers betrachten wir die kohärente Rotation

$$E = \exp(i\epsilon\sigma_x)$$

Mit $\epsilon \ll 1$. Wie aus der theoretischen Physik bekannt ist, gilt:

$$\exp(i\epsilon\sigma_x) = \cos(\epsilon)I + i\sin(\epsilon)\sigma_x$$

E mischt also dem Originalzustand $|\psi\rangle$ den Bit-Flip-Zustand $\sigma_x |\psi\rangle$ bei.

Beweis (auf Nachfrage) Der Beweis folgt mit $\sigma_x^2 = I$ aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\exp(i\epsilon\sigma_x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\epsilon\sigma_x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!}(i\epsilon\sigma_x)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}(i\epsilon\sigma_x)^{2n+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\epsilon^{2n} I^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!}\epsilon^{2n+1}\sigma_x I^n \\
&= \cos(\epsilon)I + i\sin(\epsilon)\sigma_x
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun eine kohärente Rotation auf allen drei Bits:

$$\begin{aligned}
E &= (\cos(\epsilon)I + i\sin(\epsilon)X)^{\otimes 3} \\
&= \underbrace{\cos^3(\epsilon)}_{c_0} I \otimes I \otimes I \\
&+ \underbrace{i\cos^2(\epsilon)\sin(\epsilon)}_{c_1} [X \otimes I \otimes I + I \otimes X \otimes I + I \otimes I \otimes X] \\
&\underbrace{-\cos(\epsilon)\sin^2(\epsilon)}_{c_2} [I \otimes X \otimes X + X \otimes I \otimes X + X \otimes X \otimes I] \\
&\underbrace{-i\sin^3(\epsilon)}_{c_3} X \otimes X \otimes X
\end{aligned}$$

Analog zum klassischen Fall können wir die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fälle aufstellen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\text{kein Flip}) &= |c_0|^2 = \cos^6(\epsilon) \approx 1 - 3\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
\mathcal{P}(\text{ein Flip}) &= 3 \cdot |c_1|^2 = 3\cos^4(\epsilon)\sin^2(\epsilon) \approx 3\epsilon^2 - \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
\mathcal{P}(\text{zwei Flips}) &= 3 \cdot |c_2|^2 = 3\cos^2(\epsilon)\sin^4(\epsilon) \approx 3\epsilon^4 - \mathcal{O}(\epsilon^6) \\
\mathcal{P}(\text{drei Flips}) &= |c_3|^2 = \sin^6(\epsilon) \approx \epsilon^6 - \mathcal{O}(\epsilon^8)
\end{aligned}$$

Wie in der klassischen Fehlerkorrektur wird ein Fehler umso unwahrscheinlicher, je größer die Anzahl der Bit-Flips ist.

Beim klassischen 3-Bit-Code wurden die null- und ein-Flip-Zustände vollständig zum 000-Zustand korrigiert. Die restlichen Zustände ergaben einen reinen 111-Zustand. Dies ist beim quantenmechanischen 3-Bit-Code nicht mehr der Fall! Mehrfache Bit-Flips werden auch hier nicht zum falschen logischen Wert korrigiert:

$$\begin{aligned}
U_{\text{korr}} E |\psi\rangle_{\text{L}} &= [c_0 + c_3 XXX] |\psi\rangle_{\text{L}} |00\rangle \\
&+ [c_1 + c_2 XXX] |\psi\rangle_{\text{L}} |11\rangle \\
&+ [c_1 + c_2 XXX] |\psi\rangle_{\text{L}} |10\rangle \\
&+ [c_1 + c_2 XXX] |\psi\rangle_{\text{L}} |01\rangle
\end{aligned}$$

Während der Fehlerkorrektur werden die Hilfsbits $|hh\rangle$ gemessen, $U_{\text{korr}} E |\psi\rangle_{\text{L}}$ wird also in einen der vier möglichen Zustände zu $|hh\rangle$ projiziert. *Jeder mögliche Endzustand von $|\psi\rangle_{\text{L}}$ besteht aus einer Superposition des ursprünglichen Bits $|\psi\rangle_{\text{L}}$ und des invertierten Bits $XXX|\psi\rangle_{\text{L}}$. Die quantenmechanische Fehlerkorrektur liefert also keine reinen Zustände zurück, da quantenmechanisch kontinuierliche Fehler auftreten können!* Die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende der Rechnung $XXX|\psi\rangle_{\text{L}}$ gemessen wird, hängt vom Wert der Hilfsbits $|hh\rangle$ ab:

- Falls kein Fehler entdeckt wurde ($|hh\rangle = |00\rangle$) und $\langle\psi|_{\text{L}} XXX |\psi\rangle_{\text{L}} = 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} p_{\text{Fehler}}^{\text{keineKorrektur}} &= n_1 |c_3|^2 \\ &= \frac{|c_3|^2}{|c_0|^2 + |c_3|^2} \\ &= \frac{\sin^6}{\cos^6 + \sin^6} \\ &\approx \frac{\epsilon^6}{1+\epsilon^6} = \epsilon^6 \end{aligned}$$

  Mit $\frac{x}{1+x} \approx x - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

- Falls ein Fehler entdeckt wurde ($|hh\rangle \neq |00\rangle$) gilt:

$$\begin{aligned} p_{\text{Fehler}}^{\text{Korrektur}} &= n_2 |c_2|^2 \\ &= \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2} \\ &= \frac{\cos^2(\epsilon)\sin^4(\epsilon)}{\sin^2(\epsilon)\cos^4(\epsilon) + \cos^2(\epsilon)\sin^4(\epsilon)} \\ &\approx \frac{\epsilon^4}{\epsilon^2 + \epsilon^4} = \epsilon^2 \end{aligned}$$

- Ohne Fehlerkorrektur wäre ein Fehler mit Wahrscheinlichkeit

$$p = \sin^2(\epsilon) \approx \epsilon^2$$

  aufgetreten.

Der Wert $F = 1 - p$ heißt Genauigkeit (*fidelity*) des Bits. Falls kein Fehler entdeckt wurde, hat die Genauigkeit des Bits zugenommen. Wegen $\mathcal{P}(\text{kein Flip}) \gg \mathcal{P}((\text{mehrere) Flips})$ tritt dieser Fall am häufigsten auf. Andernfalls bleibt die Genauigkeit des Bits unverändert. Im Mittel verbessert sich die Genauigkeit des Bits durch die Fehlerkorrektur.

Beweis (auf Nachfrage)

$$\begin{aligned} \langle p\rangle &= [\mathcal{P}(\text{kein Flip}) + \mathcal{P}(\text{drei Flips})] \cdot p_{\text{Fehler}}^{\text{keineKorrektur}} + [\mathcal{P}(\text{ein Flip}) + \mathcal{P}(\text{zwei Flips})] \cdot p_{\text{Fehler}}^{\text{Korrektur}} \\ &\approx (1 - 3\epsilon^2 + \epsilon^6) \cdot \epsilon^6 + (3\epsilon^2 + 3\epsilon^4) \cdot \epsilon^2 \\ &= \epsilon^6 - 3\epsilon^8 + \epsilon^{12} + 3\epsilon^4 + 3\epsilon^6 \\ &= 3\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{aligned}$$

Ohne Fehlerkorrektur hätte es nur den Fall $|\psi\rangle_{\text{L}} \longrightarrow E|\psi\rangle_{\text{L}}$ gegeben ($\mathcal{P} = 1$) mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $p = \epsilon^2$. Die Genauigkeit nimmt also von

$$F_{\text{ohneKorrektur}} = 1 - \epsilon^2$$

zu auf:

$$F_{\text{Korrektur}} = 1 - 3\epsilon^4$$