

2. Grundbegriffe der Statistik

2.1 Elementare Begriffe

Im Folgenden betrachten wir eine oder mehrere **stochastische Variablen** X oder auch stochastische Funktionen. Eine stochastische Variable kann entweder diskrete Werte $\{x_1, x_2, \dots\}$ annehmen (z.B. die Zahl der Punkte bei $3 \times$ Würfeln) oder kontinuierliche Werte $\{x\}$ (z.B. die Koordinate eines Teilchens). Die statistischen Eigenschaften von X sind vollständig beschrieben durch die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder Verteilungsfunktion ρ . Sie erfüllt

	für diskrete Werte	kontinuierliche Werte von X
• Positivität	$\rho_i \geq 0$	$\rho(x) \geq 0$
• Norm	$\sum_i \rho_i = 1$	$\int dx \rho(x) = 1$.

Damit finden wir:

• Mittelwert	$\langle X \rangle = \sum_i x_i \rho_i$	$= \int dx x \rho(x)$
• n-tes Moment	$\langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n \rho_i$	$= \int dx x^n \rho(x)$

• Standardabweichung $\sigma = [\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2]^{1/2}$ und Varianz $= \sigma^2$

• Die **charakteristische Funktion** ist $\phi(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} \rho(x)$. Die Umkehrung lautet

$\rho(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi(k)$. Die charakteristische Funktion kann nach den Momenten entwickelt

werden, $\phi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$, und so aus den Momenten die Verteilungsfunktion bestimmt

werden. Umgekehrt lassen sich aus der charakteristischen Funktion die Momente bestimmen

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \phi(k)}{dk^n} \Big|_{k=0} .$$

• Kumulanten-Entwicklung und Kumulanten-erzeugende Funktion

$$\phi(k) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} C_n(X) \right\} = \exp S \quad \text{mit} \quad C_n(X) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n S}{dk^n} \Big|_{k=0}$$

Der Vergleich (nach Entwickeln) liefert die Relation zwischen Kumulanten und Momenten

$$C_1(X) = \langle X \rangle ; \quad C_2(X) = \sigma^2 ; \quad C_3(X) = \langle X^3 \rangle - 3 \langle X \rangle \langle X^2 \rangle + 2 \langle X \rangle^3 ; \quad \dots$$

Die Kumulanten-Entwicklung konvergiert i.a. schneller als die Entwicklung nach Momenten.

Z.B für eine Gauß-Verteilung, $\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{\sigma^2}\right]$, gilt $C_n(X) = 0$ für $n \geq 3$.

Mehrere stochastische Variablen

Als Beispiel betrachten wir 2 kontinuierliche Variablen X mit möglichen Werten {x} und Y mit den Werten {y}. Im Produktraum $X \times Y$ sind die möglichen Werte {(x,y)}. Es gilt

- Gemeinsame Verteilungsfunktion $\rho_{X \times Y}(x,y) \geq 0$, normiert $\int dx \int dy \rho_{X \times Y}(x,y) = 1$
- Momente $\langle X^n Y^m \rangle = \int dx \int dy x^n y^m \rho_{X \times Y}(x,y)$
- reduzierte Verteilungsfunktion $\rho_X(x) = \int dy \rho_{X \times Y}(x,y)$
- Kovarianz: $\text{cov}(X,Y) \equiv \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle$
- Korrelation: $\text{cor}(X,Y) \equiv \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

Unabhängige Variablen

Wenn X und Y unabhängig sind, faktorisiert die gemeinsame Verteilungsfunktion,

$$\rho_{X \times Y}(x,y) = \rho_X(x) \rho_Y(y).$$

Stochastische Funktion

Als Beispiel betrachten wir eine stochastische zeitabhängig Funktion der Zeit X(t). Hier interessiert die

- Autokorrelationsfunktion $f(t,t') = \langle (X(t) - \langle X \rangle)(X(t') - \langle X \rangle) \rangle$

2.2 Die Binomial-, Gauß- und Poisson-Verteilung

Wir betrachten N verschiedene Objekte. Dann ist die Zahl der **Permutationen** N! (d.h. unter Berücksichtigung der Anordnung). Wenn wir R Objekte aus N herausgreifen, ist die Zahl der **Variationen** (mit Berücksichtigung der Anordnung) $\frac{N!}{(N-R)!}$. Dagegen ist die Zahl der **Kombinationen** (d.h. ohne Berücksichtigung der Anordnung) $\binom{N}{R} = \frac{N!}{(N-R)!R!}$.

Wir betrachten ein System, wo jede Messung eines von zwei möglichen Ergebnissen A oder B liefert mit den Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$.

Beispiele: Münze: Ergebnis = Kopf (mit $p = \frac{1}{2}$) oder Ergebnis = Zahl (mit $q = \frac{1}{2}$)

Spin im Magnetfeld: \uparrow (p) oder \downarrow (q)

Teilchen in Teilvolumen V_1 ($p = V_1/V$) oder außerhalb ($q = \frac{V - V_1}{V}$)

radioaktiver Zerfall: Zerfallswahrscheinlichkeit in Zeiteinheit Δt ist $p \ll 1$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass N Messungen n mal das Ergebnis A und entsprechend $N - n$ mal das Ergebnis B liefern, ist gegeben durch die

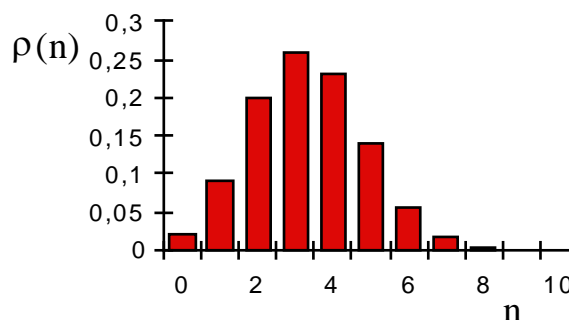
Binomial-Verteilung

$$\rho_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$\sum_{n=0}^N \rho_N(n) = (p+q)^N = 1$$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n \rho_N(n) = p N$$

$$\sigma_N = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{N p q}$$



Binomial-Verteilung für $N = 10$, $p = 1/3$

Für große N gilt $\sigma_N/\langle n \rangle \propto 1/\sqrt{N}$. D.h. die relative Breite verschwindet für große N .

Gauß-Verteilung

Für große N , pN und qN reduziert sich die Binomial-Verteilung auf eine Gauß-Verteilung um den Mittelwert $\langle n \rangle = pN$ mit der Varianz $\sigma^2 = N p q$, und n kann als kontinuierliche Variable betrachtet werden. Zum Beweis verwenden wir die Stirling-Formel, die sagt, dass für große m gilt:

$$m! \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m. \text{ Damit gilt}$$

$$\rho(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2 \sigma^2}\right] \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dn \rho(n) = 1$$

Poisson-Verteilung

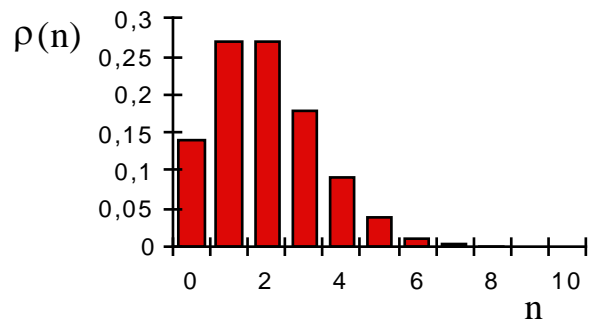
Für $N \rightarrow \infty$ und gleichzeitig $p \rightarrow 0$, so dass $a = Np$ endlich bleibt, reduziert sich die Binomial-Verteilung auf eine Poisson-Verteilung (z.B. radioaktiver Zerfall)

$$\rho(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) = 1$$

$$\langle n \rangle = a$$

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{\langle n \rangle}$$

Poisson-Verteilung für $a = 2$

Gauß-Verteilung für mehrere Variablen $x_1 \dots x_M$

Als nächstes betrachten wir mehrere stochastische Variablen x_i , die charakterisiert sind durch eine gemeinsame (normierte) Gauß-Verteilung

$$\rho(x_1, \dots, x_M) = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{A})}}{(2\pi)^{M/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M (x_i - a_i) \mathbf{A}_{ij} (x_j - a_j) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\det(\mathbf{A})}}{(2\pi)^{M/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \xi_i \mathbf{A}_{ij} \xi_j \right]$$

wobei $\xi_i = x_i - a_i$, und \mathbf{A} ist eine M -dimensionale, symmetrische, positiv definite Matrix. Dann gilt für Mittelwert, Kovarianz und die höheren Momente

$$\langle x_n \rangle = a_n, \quad \langle \xi_i \xi_j \rangle = \mathbf{A}_{ij}^{-1}, \quad \langle \xi_i \xi_j \xi_k \xi_m \rangle = \mathbf{A}_{ij}^{-1} \mathbf{A}_{km}^{-1} + \mathbf{A}_{ik}^{-1} \mathbf{A}_{jm}^{-1} + \mathbf{A}_{im}^{-1} \mathbf{A}_{jk}^{-1}, \text{ usw.}$$

Zur Herleitung beweisen wir zunächst die Relation

$$\frac{\sqrt{\det(\mathbf{A})}}{(2\pi)^{M/2}} \int d^M \xi \exp \left[-\frac{1}{2} \xi^T \mathbf{A} \xi + \mathbf{b}^T \xi \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right]. \quad (*)$$

Dazu „vervollständigen wir das Quadrat“ im Exponenten der linken Seite durch den der rechten Seite

$$-\frac{1}{2} \xi^T \mathbf{A} \xi + \mathbf{b}^T \xi - \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \text{mit } \mathbf{y} = \xi - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

Weiter diagonalisieren wir die Matrix \mathbf{A} durch eine orthogonale Transformation $\mathbf{B} = \mathbf{O}^T \mathbf{A} \mathbf{O}$. Mit $\mathbf{z} = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{y}$ erhalten wir $-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}$. Damit reduziert sich das M -dimensionale Integral

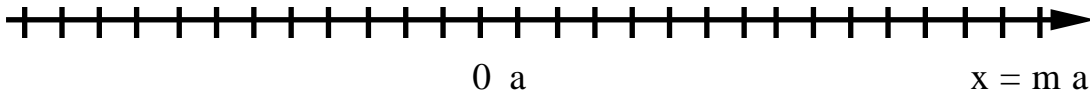
(unter Verwendung bekannter Eigenschaften wie $\det \mathbf{O} = 1$; $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$) auf ein Produkt von M ein-dimensionalen Gauß'schen Integralen

$$\begin{aligned} \int d^M \xi \exp\left[-\frac{1}{2} \xi^T \mathbf{A} \xi + \mathbf{b}^T \xi - \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\right] &= \int d^M \mathbf{y} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}\right] = \int d^M \mathbf{z} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}\right] \\ &= \int d^M \mathbf{z} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_i z_i \mathbf{B}_{ii} z_i\right] = \prod_i \int dz_i \exp\left[-\frac{1}{2} z_i \mathbf{B}_{ii} z_i\right] = \frac{(2\pi)^{M/2}}{\sqrt{\prod_i \mathbf{B}_{ii}}} = \frac{(2\pi)^{M/2}}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}} \end{aligned}$$

Für $\mathbf{b}=0$ sehen wir, dass die angegebene Verteilungsfunktion korrekt normiert ist. Den Ausdruck für die Kovarianz erhalten wir dann, indem wir die Relation (*) nach b_i und b_j ableiten und anschließend $\mathbf{b}=0$ setzen. Analog können wir die Ausdrücke für die höheren Momente ableiten.

2.3 Random Walk und Diffusion

Wir betrachten den Weg eines Betrunkenen in einer Dimension ($d=1$). Die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt der Weite a nach vorne oder zurück ist $p = q = \frac{1}{2}$. Nach N Schritten, n nach vorne und $N-n$ zurück, ist der Abstand vom Anfangspunkt (in Einheiten von a) gleich $m = n - (N-n) = 2n - N$.

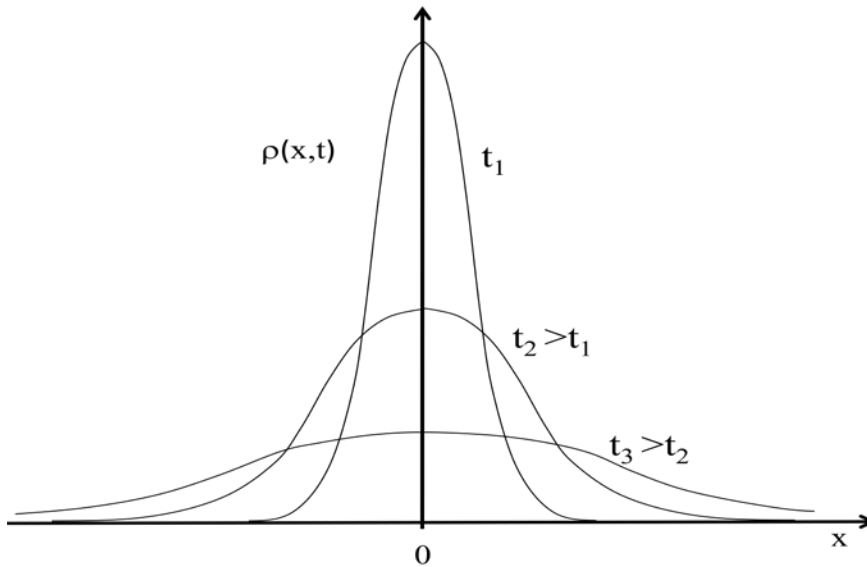


Die Wahrscheinlichkeit, nach N Schritten bei m zu sein, ist gegeben durch die Binomial-Verteilung

$$\rho_N(m) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left\{-\frac{m^2}{2N}\right\}$$

D. h. der Mittelwert ist $\langle m \rangle = 0$ und die Varianz $\langle m^2 \rangle = N$. Beachte, dass für gerade (ungerade) N auch m gerade (ungerade) ist, und die Verteilung bei anderen Werten verschwindet. Für einen Übergang zu einer Kontinuumsbeschreibung definieren wir $x = m a$ und $\rho_N(x) = \rho_N(m)/2a$. (Der Faktor $1/2$ ist nötig, weil wir in der Kontinuumsbeschreibung nicht mehr zwischen geraden und ungeraden m unterscheiden.) Wir führen eine Zeit proportional zur Zahl der Schritte $t = N \Delta t$ ein und definieren eine Diffusionskonstante $D = a^2/(2\Delta t)$. Dann gilt

$$\Rightarrow \rho(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) ; \text{ mit } \int dx \rho(x) = 1, \quad \langle x \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = 2 D t$$



D.h. $\rho(x,t)$ erfüllt eine Diffusionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,t)$. Diese lässt sich auf 3 Dimensionen verallgemeinern und erlaubt auch Berücksichtigung von Randbedingungen und Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r},t) = D \nabla^2 \rho(\mathbf{r},t) .$$

2.4 Zentraler Grenzwertsatz

Es werden N Messungen derselben stochastischen Variablen durchgeführt (d.h. das Experiment wird N -mal durchgeführt). Die einzelne Messung ist charakterisiert durch eine beliebige Verteilungsfunktion $\rho_X(x)$ mit Mittelwert $\langle x \rangle$ und Breite $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma_x$. Wir bezeichnen den Wert der stochastische Variable bei der i -ten Messung mit x_i und den durch die Summe aller N Messungen gebildeten Mittelwert mit $y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

Satz: Der so gebildete Mittelwert von N Messungen erfüllt $\langle y \rangle = \langle x \rangle$. Die Abweichungen sind beschrieben durch eine Gauß-Verteilung mit Breite $\sigma_y = \sigma_x / \sqrt{N}$, die also mit zunehmendem N abnimmt,

$$\rho_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{N}}{\sigma_x} \exp\left[-\frac{N}{2\sigma_x^2} (y - \langle x \rangle)^2\right]$$

Beweis: Die Verteilungsfunktion für den Mittelwert y ist $\rho_Y(y) = \int dx_1 \dots \int dx_N \delta\left(y - \frac{1}{N} \sum_i x_i\right) \rho_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N)$. Da die Messungen unabhängig sind, faktorisiert die gemeinsame Verteilung und es

gilt $\rho_Y(y) = \int dx_1 \dots \int dx_N \delta(y - \frac{1}{N} \sum_i x_i) \rho_X(x_1) \dots \rho_X(x_N)$. Die charakteristische Funktion der Einzelmessungen ist $\Phi_X(k) = \int dx e^{ikx} \rho_X(x)$, die der Summe ist $\Phi_Y(k) = \int dy e^{iky} \rho_Y(y)$, also

$$\begin{aligned} \Phi_Y(k) &= \int dy e^{iky} \int dx_1 \dots \int dx_N \delta(y - \frac{1}{N} \sum_i x_i) \rho_X(x_1) \dots \rho_X(x_N) \\ &= \prod_i \int dx_i \exp[i \frac{k}{N} x_i] \rho_X(x_i) \\ &= e^{ik\langle x \rangle} \prod_i \int dx_i \exp[i \frac{k}{N} (x_i - \langle x \rangle)] \rho_X(x_i) = e^{ik\langle x \rangle} \left[\tilde{\Phi}_X\left(\frac{k}{N}\right) \right]^N \end{aligned}$$

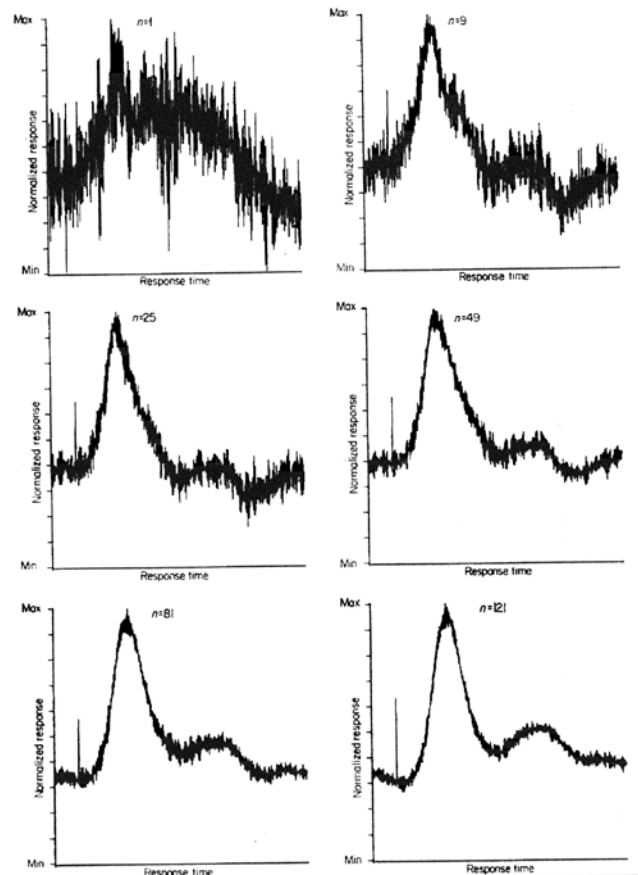
Für große N kann $\tilde{\Phi}_X\left(\frac{k}{N}\right) \equiv \int dx \exp[i \frac{k}{N} (x - \langle x \rangle)] \rho_X(x)$ in Potenzen von $\frac{k}{N} (x - \langle x \rangle)$ entwickelt werden (unabhängig von der detaillierten Form von $\rho_X(x)$)

$$\tilde{\Phi}_X\left(\frac{k}{N}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N^2} \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle + \dots = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N^2} \sigma_x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_Y(k) = e^{ik\langle x \rangle} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N^2} \sigma_x^2 \right]^N = \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \sigma_x^2 + ik\langle x \rangle\right]$$

$$\Rightarrow \rho_Y(y) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[-ik y + ik\langle x \rangle - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \sigma_x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{N}}{\sigma_x} \exp\left[-\frac{N}{2\sigma_x^2} (y - \langle x \rangle)^2\right] \quad \text{q.e.d.}$$

Die Serie von Abbildungen verdeutlicht, wie Mitteln über wiederholte Messungen das Rauschen unterdrückt. Dabei ist N die Anzahl der Messungen. Das Rauschen nimmt wie $1/\sqrt{N}$ ab. (In dem Beispiel wird eine Diode immer wieder im selben Anfangszustand präpariert und dann der elektrische Strom als Funktion der Zeit gemessen.)



2.5 Rauschspektrum

Im Folgenden untersuchen wir stochastische Prozesse, z.B. eine Größe $X(t) = \langle X \rangle + \delta X(t)$, die durch einen Mittelwert und zeitabhängig Fluktuationen charakterisiert ist. Ein Beispiel ist der Strom in einem elektrischen Stromkreis. Bei genügender Auflösung im Experiment stellt man fest, dass es Abweichungen des Stromes vom Mittelwert gibt. Die Fluktuationen erfüllen stets $\langle \delta X(t) \rangle = 0$. Die wichtigen Größen zur Charakterisierung der Fluktuationen sind deren Verteilungsfunktion (z.B. eine Gauß'sche Verteilung) und die Autokorrelationsfunktion $\langle \delta X(t) \delta X(t') \rangle$. Diese hängt mit der spektralen Dichte (power spectrum) zusammen, die wir nun definieren:

Wir betrachten die Fourier-Transformierte $\delta X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \delta X(t)$ und

$$\langle \delta X(\omega) \delta X(\omega') \rangle = \int dt \int dt' e^{-i\omega t - i\omega' t'} \langle \delta X(t) \delta X(t') \rangle.$$

Bei stationären Prozessen hängt $\langle \delta X(t) \delta X(t') \rangle$ nur von $\tau = t - t'$ ab, und wir können über $\bar{t} = (t + t')/2$ integrieren,

$$\langle \delta X(\omega) \delta X(\omega') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} e^{-i(\omega+\omega')\bar{t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\frac{\omega-\omega'}{2}\tau} \langle \delta X(\tau) \delta X(0) \rangle = \pi \delta(\omega+\omega') S(\omega)$$

Auf der rechten Seite führen wir die spektrale Dichte $S(\omega)$ ein. Sie ist (bis auf einen historisch bedingten Faktor 2) die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \langle \delta X(t) \delta X(0) \rangle$$

Die Stärke und das Frequenzspektrum des Rauschens werden durch eine solche spektrale Dichte charakterisiert. Der Zusammenhang zwischen der spektralen Dichte (die auch in anderer Weise eingeführt werden kann) und der Korrelationsfunktion ist auch unter dem Namen **Wiener-Khinchine** (oder Wiener-Chintschin) „**Theorem**“ bekannt. (Der hier nicht logische erscheinende Faktor 2 rührt von diesem Zugang.)

Beispiele sind

- **thermisches, weißes Rauschen:**

Im klassischen Grenzfall (hohe Temperatur, ...) haben die Fluktuationen des Stromes $I(t) = \langle I \rangle + \delta I(t)$ durch einen Widerstand R die folgenden Eigenschaften (Nyquist Rauschen)

$$\langle \delta I(t) \rangle = 0$$

$$\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = 2 \frac{kT}{R} \delta(t-t') \Rightarrow S_I(\omega) = 4 \frac{kT}{R} .$$

Die Korrelationsfunktion ist δ -korreliert, d.h. es gibt keine Korrelationen zwischen den Werten des Rauschstroms zu verschiedenen Zeiten. Im Fourier-Spektrum bedeutet dies, dass die spektrale Dichte frequenzunabhängig ist, d.h. das Rauschen ist „weiß“. Meist kann angenommen werden, dass die Fluktuationen, die herrühren von sehr vielen einzelnen Prozessen, konsistent mit dem Zentralen Grenzwertsatz Gauß'sch verteilt sind. Die Stärke des Rauschens ist proportional zur Stärke der Dissipation $1/R$. Dies wird in folgenden Kapiteln begründet.

- **Quantenrauschen eines Widerstands R (Johnson-Nyquist Rauschen)**

Allgemeiner gilt für das Stromrauschen eines Widerstands

$$S_I(\omega) = 2 \frac{\hbar\omega}{R} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

Diese Form kann in quantenmechanischen Modellen hergeleitet werden. Wir bemerken, dass sie sich für $\hbar\omega \ll kT$ auf das klassische, weiße Rauschen reduziert. Unterschiede gibt es bei tiefen Temperaturen oder hohen Frequenzen. Für $\hbar\omega \gg kT$ findet man $S_I(\omega) = 2 \hbar |\omega| / R$. Dazu ein Zahlenbeispiel: mit $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-27}$ erg sec und $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/K entspricht eine Temperatur von $T = 1\text{K}$ einer Kreisfrequenz $\omega = 1,308 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ bzw. einer Frequenz $f = \omega/2\pi \approx 21 \text{ GHz}$.

- **Schrotrauschen** ist assoziiert mit diskreten stochastischen Prozessen z.B. Elektronentunneln. Dafür gilt (siehe Übungen)

$$\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{eV}{R} \coth \frac{eV}{2kT} \delta(t-t') \Rightarrow S_I(\omega) = 2 \frac{eV}{R} \coth \frac{eV}{2kT} \xrightarrow{eV \gg kT} 2eI$$

Auch hierzu ein Zahlenbeispiel: mit $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C und $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Joule/K entspricht eine Temperatur von $T = 1\text{K}$ einer Energie $eV \approx 1 \cdot 10^{-4}$ [eV] ([eV] ist hier die Energieeinheit Elektronvolt) und entsprechenden Werten der Spannung.

- **1/f - Rauschen**

Hier ist die Frequenzabhängigkeit des Rauschspektrums

$$S(\omega) \propto 1/\omega$$

1/f - Rauschen wird in vielen Systemen bei niederen Frequenzen ($\omega = 2\pi f$) beobachtet, wo es stärker wird als das weiße thermische Rauschen. In manchen physikalischen Systemen findet man dafür physikalische Erklärungen. Überraschend findet man 1/f - Rauschen aber auch in ganz anderen Fällen, z.B. bei der Analyse der Schwankungen des Wasserstandes des Nils im Altertum, bei klassischer Musik, beim Vogelgesang und so weiter. Eine universelle Erklärung dafür wurde noch nicht gefunden.

