

# Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Quanten-Hall-Effekt</b>	<b>2</b>
6.1	Landau-Niveaus . . . . .	2
6.2	(Zu) einfaches Bild . . . . .	2
6.3	Unordnung und lokalisierte Zustände . . . . .	5
6.4	Topologisches Argument . . . . .	6
6.5	Der fraktionelle Quanten-Hall-Effekt . . . . .	7
6.6	Randkanäle . . . . .	8
6.7	QHE in Graphen . . . . .	13
6.8	Kompressible und inkompressible Bereiche . . . . .	15

# Kapitel 6

## Quanten-Hall-Effekt

### 6.1 Landau-Niveaus

Siehe Quantenmechanik-Vorlesungen

### 6.2 (Zu) einfaches Bild

Dieser Abschnitt führt uns nun zum eigentlichen Punkt dieses Kapitels, dem Quanten-Hall-Effekt. Zur Vereinfachung ignorieren wir im Folgenden zunächst den Spin.

Aufgrund der Entartung können in jedem Landau-Niveau  $M$  Elektronenzustände besetzt werden. Wenn wir nun die Fermi-Energie  $E_F$  unabhängig von allen anderen Parametern variieren könnten, würde sich die Zahl der Elektronen in Stufen von  $M$  ändern jedesmal, wenn  $E_F$  an einem Landau-Niveau vorbeigeschoben wird. D.h. der Füllfaktor, das Verhältnis zwischen der Zahl der Elektronen und der Entartung

$$\nu = \frac{N}{M} = 0, 1, 2, \dots$$

ändert sich in ganzen Zahlen.

Kombinieren wir dies mit dem klassischen Ergebnis, dass der Hall-Widerstand nur von der Elektronendichte abhängt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{B}{n^{2d}|e|c} = \frac{BF}{N|e|c} = \frac{\Phi}{N|e|c} = \\ &= \frac{\Phi/\Phi_0}{N|e|^2/hc} = \frac{M}{N} \frac{h}{|e|^2} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{|e|^2} \quad \text{mit } \nu = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

D.h. der inverse Hall-Widerstand  $1/R_H$  nimmt ganzzahlige Vielfache von  $e^2/h$  an und ändert sich in Stufen.

In der Regel können wir nicht die Fermi-Energie unabhängig einstellen. Schon eher können wir uns vorstellen, dass die Fermi-Energie konstant ist, und wir das Magnetfeld

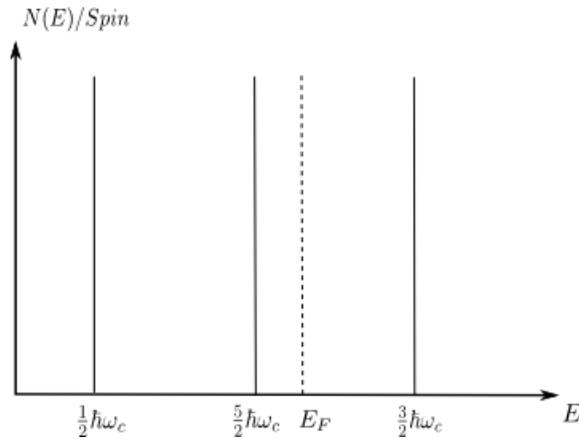


Abbildung 6.1: Zustandsdichte mit  $M$ -fach entarteten Landau-Niveaus

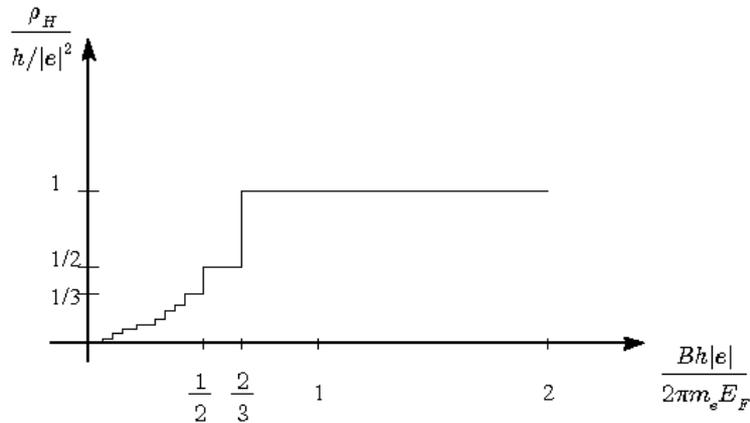


Abbildung 6.2: Der Hall-Widerstand als Funktion des Magnetfelds

verändern. Dann ändert sich aber weiterhin der Füllfaktor in ganzzahligen Stufen und entsprechend der inverse Hall-Widerstand in Vielfachen von  $e^2/h$ . Das Ergebnis für  $\rho_H$  geplottet als Funktion des Magnetfeldes ist in Abb. 6.2 dargestellt.

Das so gewonnene Bild ähnelt schon in wichtigen Eigenschaften dem, das von K. von Klitzing im Experiment beobachtet wurde. Im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt, wo  $\rho_H$  linear mit dem Magnetfeld zunimmt, gibt es beim Quanten-Hall-Effekt Plateaus, in denen der Hall-Widerstand als Funktion des Magnetfeldes sich nicht ändert. Auf diesen Plateaus ist  $1/\rho_H$  ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\frac{e^2}{h} = \frac{1}{25,812807572 \text{ k}\Omega} \equiv \frac{1}{R_K}$$

Der so definierte Quantenwiderstand  $R_K$ , der nur von Naturkonstanten abhängt, wird nach K. von Klitzing benannt. Er stellt heute den Standard für den Widerstand dar. D.h., das ein Quanten-Hall-Experiment herangezogen wird, um die Skala von Widerstandsmessungen festzulegen. Zusammen mit anderen Experimenten, z.B. den Josephson Effekt, der

einen Standard für  $h/e$  liefert, kann man so  $e$  und  $h$  mit hoher Präzision (mehr als 8 Stellen) messen.

Für seine Arbeiten zum Quanten-Hall-Effekt erhielt Klaus von Klitzing 1985 den Physik-Nobelpreis.

### Kritik an der bisherigen Herleitung und Diskussion

1) Im Experiment können wir nicht  $E_F$  unabhängig festhalten, sondern die Teilchenzahl  $N$  ist weitgehend fest. D.h. fast immer sind ein Teil,  $i = 0, 1, 2, \dots$  der Landau-Niveaus gefüllt, während das  $(i + 1)$ ste nur partiell gefüllt ist. Wenn wir nun z.B. das Magnetfeld variieren, liegt die Fermi-Energie  $E_F$  fast immer auf einem Landau Niveau, und wenn dies gefüllt ist, wird sie springen. Dies bedeutet, dass wir die bisherige Erklärung der Quantisierung, die darauf beruhte, dass wir immer ganz gefüllte Landau-Niveaus betrachteten, nicht ausreicht.

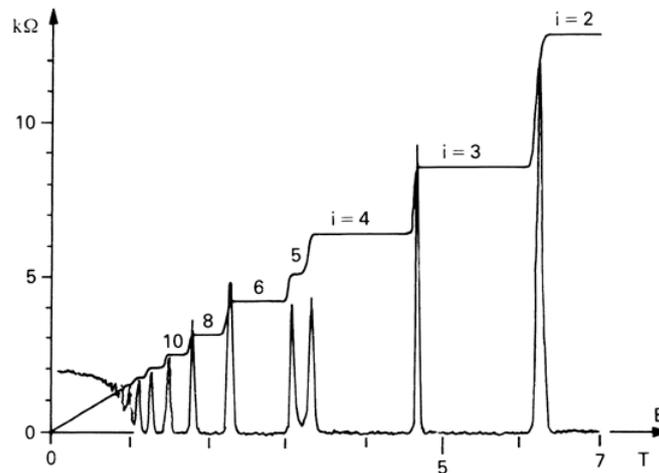


Abbildung 6.3: Der ganzzahlige Quanten-Hall-Effekt im Experiment (Quelle: www.ptb.de)

2) Das Experiment zeigt, dass im Bereich der Plateaus des Hall-Widerstandes  $\rho_H = \rho_{xy}$  der Transportwiderstand  $\rho_{xx}$  (und damit auch  $\sigma_{xx}$ ) verschwinden, während beide dort wo  $\rho_{xy}$  Stufen - mit endlicher Breite - hat,  $\rho_{xx}$  und  $\sigma_{xx}$  groß sind.

Dieses Verhalten des Transportwiderstandes lässt sich als Folge der Kombination des Störstellenpotenzials und der Landau-Niveaus verstehen. Es gilt für die Streurrate

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\pi}{\hbar} N(E_F) \cdot c_{\text{imp}} \cdot U^2$$

wobei  $c_{\text{imp}}$  die Störstellenkonzentration und  $U$  das Störstellenpotenzial ist. Die Streurrate und damit der Transportwiderstand  $\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau}$  sind also dort groß, wo die Zustandsdichte  $N(E_F)$  groß ist und verschwindet zwischen den Landau-Niveaus. Die damit verbundenen Oszillationen des Widerstands mit dem Magnetfeld waren schon vor der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts als Schubnikov-de Haas Oszillationen bekannt.

### 6.3 Unordnung und lokalisierte Zustände

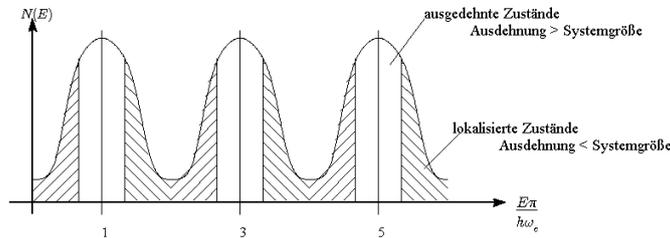


Abbildung 6.4: Elektronische Zustandsdichte in einem Leiter mit Störstellenstreuung und Magnetfeld

Die Störstellenstreuung ändert auch die Zustandsdichte. Anstelle von  $M$ -fach entarteten Landau-Niveaus bei den Energien  $E_n = (n+1/2) \hbar\omega_c$  erhalten wir verbreiterte Bereiche wie in Abb. 6.4 gezeigt. Weiterhin wissen wir auf Grund der Arbeiten von P.W. Anderson, dass in 2-dimensionalen Systemen (ebenso in 1-dimensionalen sowie in 3-Dimensionen, wenn die Störstellenstreuung eine kritischen Stärke überschreitet), dass die Elektronenzustände nicht länger ausgedehnt sind (z.B. ebene Wellen), sondern dass sie "lokalisiert" sind. D.h.  $\psi(\vec{r})$  ist nur in einem beschränkten räumlichen Bereich von der Größe  $\xi$  von 0 verschieden. Diese Lokalisierungslänge hängt von der Energie ab

$$\xi \sim |E - E_n|^{-s}$$

mit einem Exponenten, der von der Größe  $s \approx 1 \dots 2$  ist. Die Lokalisierungslänge ist nun mit der Größe  $L_x$  des Systems zu vergleichen. Zustände mit Energie  $E$  nahe bei  $E_n$  sind effektiv ausgedehnte Zustände, dagegen diejenigen die weiter weg sind, sind lokalisiert.

Mit diesen lokalisierten Zuständen ändert sich die Fermienergie  $E_F$  kontinuierlich, wenn wir die Teilchenzahl  $N$  oder bei fester Teilchenzahl das Magnetfeld ändern. Zur Vereinfachung der Diskussion nehmen wir wieder zunächst an, dass wir bei festem  $B$  die Fermienergie und damit die Elektronenzahl  $N$  verändern. Dann füllen wir, je nachdem wo  $E_F$  liegt, entweder lokalisierte Zustände auf oder die ausgedehnten. Dasselbe gilt, wenn wir bei fester Teilchenzahl das Magnetfeld ändern. Daraus folgt offensichtlich:

- Wenn  $E_F$  im Bereich der lokalisierten Zustände liegt, dann folgt  $\sigma_{xx} \propto \rho_{xx} \approx 0$ .
- Wenn  $E_F$  im Bereich der ausgedehnten Zustände liegt, dann ist  $\sigma_{xx}$  groß und daher auch  $\rho_{xx} \neq 0$ .

Es gilt weiterhin

- Wenn  $E_F$  im Bereich der lokalisierten Zustände liegt, dann ist  $\sigma_{xy}$  quantisiert in ganzzahligen Vielfachen von  $e^2/h$ .

Letzteres ist intuitiv nicht offensichtlich. Als einfachste Erklärung können wir sagen, dass für das Zustandekommen einer Hall-Spannung sich die Elektronen ja nicht in senkrechter Richtung zum Strom bewegen müssen, da die Hall-Spannung ja gerade die Lorentz-Kraft kompensiert. Insofern sind lokalisierte wie ausgedehnte Elektronenzustände gleichwertig.

## 6.4 Topologisches Argument

Die Quantisierung des Hall-Widerstands folgt aus einem topologischen Argument, das auf R.B. Laughlin zurückgeht, der später den Nobelpreis für die Theorie des fraktionellen Quanten-Hall-Effektes erhielt. Für dieses Argument stellen wir uns vor, dass die Hall-Probe in  $x$ -Richtung zu einem Ring (mit Radius  $R = L_x/(2\pi)$  und Breite  $W$  in  $y$ -Richtung) gebogen ist. Das angelegte Magnetfeld, das zuvor in  $z$ -Richtung zeigte, zeigt nun strahlenförmig nach außen. Der Transportstrom  $I$  ist nun ein Kreisstrom, der einen magnetischen Fluss  $\phi$  durch den Ring erzeugt. (Beachte dieser Fluss ist zu unterscheiden vom Fluss  $\Phi$ , der vom angelegten Magnetfeld  $B$  herrührt.)

Alle quantenmechanischen Zustände auf dem Ring sind natürlich periodische Funktionen der Variable  $\varphi$ , die anstelle der ursprünglichen Variablen  $x = R\varphi$  die Lage auf dem Ring beschreibt. Der Fluss  $\phi$ , bzw. das zugehörige Vektorpotenzial  $\vec{a}$  kann durch eine Eichtransformation berücksichtigt werden (vergleiche die Beschreibung des Aharonov-Bohm-Effektes)

$$\psi_\phi(\varphi) = \psi_0(\varphi) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{|e|}{c} \int^x dx' \vec{a}(x') \right]$$

und kann so effektiv durch verschiedene Randbedingungen bei  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\pi$  berücksichtigt werden. Damit wird klar, dass die Eigenenergien der Elektronenzustände, die von dem Fluss  $\phi$  abhängen, periodische Funktion von  $\phi$  mit Periode  $\Phi_0 = hc/e$  sind. Man kann nun weiter zeigen, dass der quantenmechanische Dauerstrom ("persistent current"), der mit diesem Zustand verknüpft ist, sich als Ableitung der Energie nach dem Fluss schreiben lässt, und dies gilt für jeden besetzten Zustand. Also gilt für die folgende Relation zwischen Gesamtstrom und Gesamtenergie

$$I = c \frac{\partial E}{\partial \phi}$$

Wenn wir nun den Fluss  $\phi$  verändern, verändern sich effektiv die Randbedingungen an die Zustände in  $x$ -Richtung, und somit verschieben sich die Lagen der Zentren der Wellenfunktionen  $y_k$ , die wir in den Abbildungen durch die Punkte gekennzeichnet hatten. Und wenn wir  $\phi$  um ein Quantum  $\Phi_0$  verschoben haben, haben wir jeden Zustand gerade auf den Platz verschoben, den zuvor sein Nachbar inne hatte. D.h. aber auch, dass gerade ein Zustand pro besetztes Landau-Niveau durch die Breite  $W$  der Probe durchgeschoben wurde. Da diese Bewegung gegen die Hall-Spannung durchgeführt wird, kostet es für  $\delta\phi = \Phi_0$  bei  $i$  besetzten Niveau die Energie  $\delta E = i|e|V_H$ . Damit ergibt sich

$$\sigma_{xy} = \frac{I}{V_H} = \frac{c}{V_H} \frac{\delta E}{\delta \phi} = \frac{i|e|c}{\Phi_0} = i \frac{e^2}{h}$$

D.h. das topologische Argument liefert genau den quantisierten Wert der Hall-Leitfähigkeit.

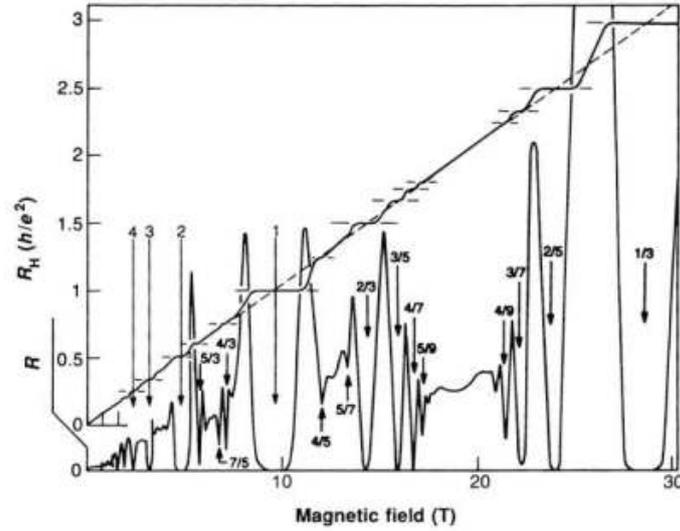


Abbildung 6.5: Der fraktionelle Quanten-Hall-Effekt zeigt weitere Plateaus im Hall-Widerstand (Quelle: <http://www.prequark.org/Q4.htm>)

## 6.5 Der fraktionelle Quanten-Hall-Effekt

Einige Jahre nach der Entdeckung des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts wurden in sehr reinen Proben viele weitere Plateaus bei nicht-ganzzahligem  $\nu$  gefunden. Beim ganzzahligen QHE liegen die Plateaus in  $\rho_{xy} = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2}$  bei Füllfaktoren  $\nu = i = 1, 2, 3, \dots$  und  $\rho_{xx}$  verschwindet. Zwischen den Plateaus nimmt  $\rho_{xx}$  große Werte an. Der fraktionelle QHE ist charakterisiert durch weitere Plateaus in  $\rho_{xy}$  bei gleichzeitigem Verschwinden von  $\rho_{xx}$  und zwar bei gebrochenzahligen Füllfaktoren

$$\nu = \nu_p = \frac{p}{2p+1} \quad \text{und} \quad \nu = 1 - \nu_p, 1 + \nu_p, 2 - \nu_p, \dots, \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots$$

d.h.  $\nu = (0), \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots \rightarrow \frac{1}{2}$  und  $\nu = 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \dots$

sowie bei

$$\nu = \bar{\nu}_p = \frac{p}{4p \pm 1} \quad \text{und} \quad 1 - \bar{\nu}_p, 1 + \bar{\nu}_p, 2 - \bar{\nu}_p, \dots, \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots$$

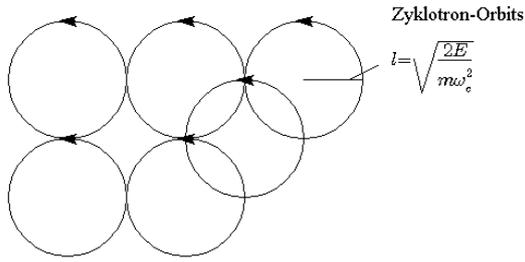
## 6.6 Randkanäle

Dieses anschauliche Bild der Randkanäle folgt auch aus der quantenmechanischen Analyse. Dazu nehmen wir an, dass das Potenzial  $V(y)$ , das den Rand definiert, kontinuierlich von 0 auf große Werte steigt. Die Zustände in der Nähe des Randes haben daher die Energie

$$E_{nk} \approx \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + V(y_k) \quad y_k = \frac{\hbar c}{|e|B} k$$

und somit die Gruppengeschwindigkeit in  $x$ -Richtung

$$v_k = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{nk}}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial V(y_k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\hbar c}{|e|B} \frac{\partial V}{\partial y}$$



Im Magnetfeld bewegen sich freie Elektronen auf Zyklotronbahnen. Im Innern einer Probe kompensieren sich diese überall und die Stromdichte verschwindet.



Am Rand der Probe bleibt aber eine Netto-Stromdichte übrig.

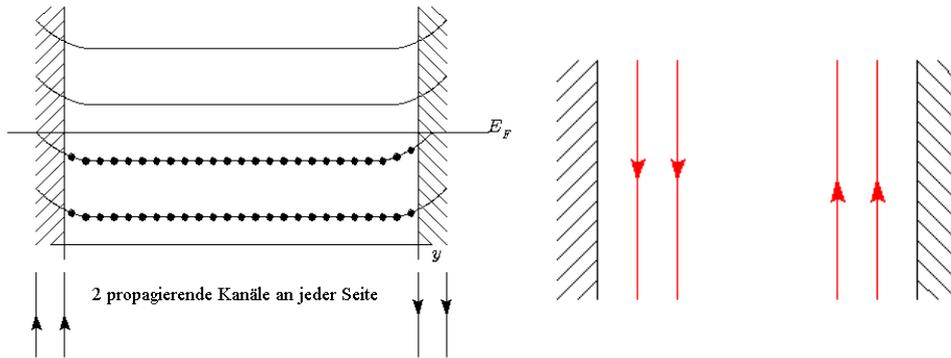


Abbildung 6.6: Landau-Niveaus unterhalb der Fermienergie schneiden diese am Rand und bilden eine entsprechende Zahl von Randkanälen. (Das Bild ist schlecht. Es sollten alle unteren Landau-Niveaus am Rand so weit nach oben gebogen sein, dass sie die Fermi-Energie schneiden.) Die Randkanäle propagieren an den beiden Seiten in verschiedene Richtungen.

Die Richtung des Stromes hat verschiedenes Vorzeichen an den beiden Rändern. Von Bedeutung sind nur die Zustände, deren Energie bei der Fermi-Energie liegt, d.h. Zustände deren am Rand nach oben gebogene Landau-Niveaus das Fermi-Niveau schneiden

Für jeden der Randkanäle gilt wieder, dass das Produkt aus Zustandsdichte und Gruppengeschwindigkeit konstant ist,  $N(E) v_k = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\partial E / \partial k} \hbar \frac{\partial E}{\partial k} = \text{const.}$  D.h. der Leitwert pro Randkanal (und Spin) ist  $e^2/h$ .

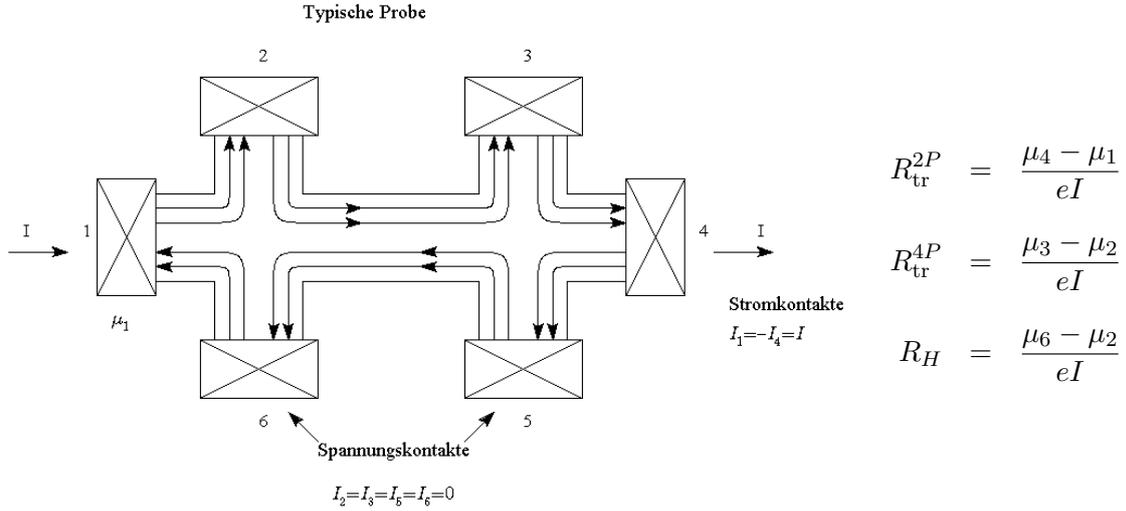
In den Hall-Proben haben wir somit eine ideale Realisierung 1-dimensionaler Leitwertkanäle. Diese können wir nun mit dem von Büttiker entwickelten Multe-Kanal - Multi-Proben Formalismus analysieren

$$\frac{h}{2e} I_\alpha = (N_\alpha - R_\alpha) \mu_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} T_{\beta \rightarrow \alpha} \mu_\beta.$$

Einfaches Beispiel:

Wir betrachten zunächst eine typische Hall-Proben-Geometrie mit Strom- und Spannungs-

kontakten und wollen den Transportwiderstand für 2-Proben und 4-Proben-Messung sowie den Hall-Widerstand bestimmen.



Wir nehmen an, dass es  $N$  Kanäle gibt, die alle jeweils zwischen benachbarten Kontakten völlig transparent propagieren  $T_{21} = T_{32} = T_{43} = T_{54} = T_{65} = T_{16} = T = N$ , während die restlichen Transmissions und Reflexionskoeffizienten verschwinden,  $T_{ij} = 0$ ,  $R_{ij} = 0$ . Dann gilt für die 6 Kontakte

$$\begin{aligned} \frac{h}{2e} I_1 &= \frac{h}{2e} I = N\mu_1 - N\mu_6 \\ \frac{h}{2e} I_2 &= 0 = N\mu_2 - N\mu_1 \\ \frac{h}{2e} I_3 &= 0 = N\mu_3 - N\mu_2 \\ \frac{h}{2e} I_4 &= -\frac{h}{2e} I = N\mu_4 - N\mu_3 \\ \frac{h}{2e} I_5 &= 0 = N\mu_5 - N\mu_4 \\ \frac{h}{2e} I_6 &= 0 = N\mu_6 - N\mu_5 \end{aligned}$$

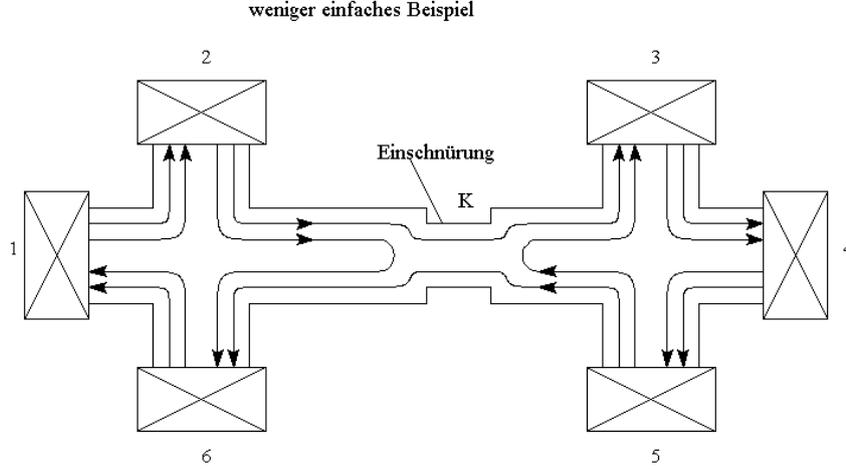
Aus der 2. und 3. Gleichung schließen wir, dass  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , während aus den letzten beiden Gleichungen  $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6$  folgt. Damit wird

$$\Rightarrow \frac{h}{2e} I = N\mu_2 - N\mu_6 \Rightarrow R_H = \frac{\mu_6 - \mu_2}{eI} = \frac{1}{N} \frac{h}{2e^2}$$

Wir finden also dass der Hall-Widerstand quantisiert ist, wobei  $N = \text{Zahl der Kanäle}$  und damit Zahl der vollen Landau-Niveaus ist. Die Herleitung zeigt auch, dass der 4-Punktswiderstand verschwindet,  $R_{\text{tr}}^{4P} = 0$ , während der 2-Punktswiderstand  $R_{\text{tr}}^{2P} = \frac{1}{N} \frac{h}{2e^2}$  die Zahl der Kanäle widerspiegelt.

Weniger einfaches Beispiel:

Wir nehmen nun an, dass



$$\begin{aligned}
 T_{21} = T_{16} = T_{43} = T_{54} &= N \\
 T_{32} = T_{65} &= K \quad \text{mit } 0 \leq K \leq N \\
 T_{62} = T_{35} &= N - K
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in das Büttiker-Schema erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\hbar}{2e} I_1 &= \frac{\hbar}{2e} I = N\mu_1 - N\mu_6 \\
 0 &= N\mu_2 - N\mu_1 \\
 0 &= N\mu_3 - K\mu_2 - (N - K)\mu_5 \\
 -\frac{\hbar}{2e} I &= N\mu_4 - N\mu_3 \\
 0 &= N\mu_5 - N\mu_4 \\
 0 &= N\mu_6 - K\mu_5 - (N - K)\mu_2
 \end{aligned}$$

und somit (nach ein paar Zwischenschritten) für die Widerstände

$$\begin{aligned}
 R_{14,32} = R_{\text{tr}}^{AP} &= \frac{\mu_3 - \mu_2}{eI} = \frac{N - K}{NK} \frac{\hbar}{2e^2} \neq 0 \quad (4 - \text{Punktewiderstandsmessung}) \\
 R_{14,41} = R_{\text{tr}}^{2P} &= \frac{\mu_4 - \mu_1}{eI} = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{1}{K} \quad (2 - \text{Punktewiderstandsmessung}) \\
 R_{14,62} = R_H &= \frac{\mu_6 - \mu_2}{eI} = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{1}{N}
 \end{aligned}$$

Hier haben wir noch ein gebräuchliche Notation eingeführt: die ersten beiden Indizes bezeichnen die Stromkontakte, die letzten beiden die Spannungskontakte. Bei dem Beispiel finden wir wieder, dass der Quanten-Hall-Widerstand quantisiert ist. Das nächste Beispiel wird aber diesen ändern.

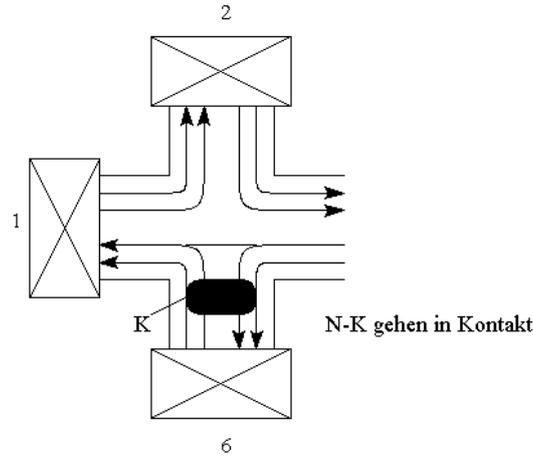


Abbildung 6.7: Die Abbildung ist hier nur ein Platzhalter. Das richtige Bild muss noch gemacht werden. Es habe 4 Reservoirs, die im Uhrzeigersinn von 1-4 nummeriert sind. Die Streuungen, die die Präzision des Quanten-Hall-Effekts zerstören, finden statt von Kontakt 2 nach 1 und von 4 nach 3, jeweils mit Transmissionswahrscheinlichkeit  $N - K$ .

Streuung über die Probe:

Streuung über die Probe wird im Allgemeinen die Quantisierung zerstören. Wir nehmen nun an, dass

$$\begin{aligned} T_{21} &= T_{43} = N \\ T_{32} &= T_{43} = K \\ T_{12} &= T_{34} = N - K \end{aligned}$$

Eingesetzt in das Büttiker-Schema erhalten wir (nach ein paar Zwischenschritten) für die Widerstände

$$R_{13,42} = R_H = \frac{\mu_4 - \mu_2}{eI} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{K}$$

Die Beispiele illustrieren, dass der Quanten-Hall-Effekt erst dann in seiner Präzision beeinflusst werden, wenn Streuprozesse zwischen 'falschen' Reservoiren stattfinden. Streuer im Innern haben keinen Einfluss auf die Randkanäle. Deshalb sind sie unwichtig. Nur solche Streuer sind potentiell wichtig, die von einem Rand an den anderen Rand streuen. Das ist aber unwahrscheinlich, wenn die Probe genügend breit ist auf der Skala der magnetischen Länge, d.h. für  $W \gg l_c$ .

### Störstellenpotenzial

Die Abbildung 6.8 illustriert, wie Störstellen die Landau-Niveaus verändern, und wir sehen, dass es bei jeder Energie Zustände gibt, die bei Variation der Fermi-Energie  $E_F$  kontinuierlich besetzt werden. Die entsprechenden Randkanäle sind in Abb. 6.9 illustriert. Solange die Störstellen nicht nahe am Rand liegen, haben sie keinen Einfluss auf den Hall-Widerstand.

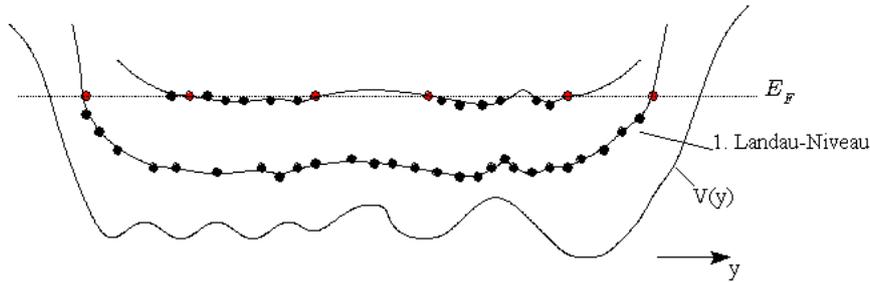


Abbildung 6.8: Landau-Niveaus mit Unordnung

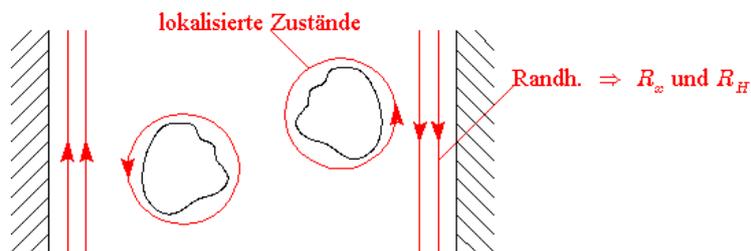


Abbildung 6.9: Randkanäle mit Unordnung

## 6.7 QHE in Graphen

Wegen seiner besonderen Bandstruktur wird Graphen durch die Dirac-Gleichung masseloser Teilchen beschrieben, was zu verschiedenen ungewöhnlichen Eigenschaften führt. Es war eine Übungsaufgabe in Quantenmechanik II die Eigenzustände von Graphen in einem Magnetfeld zu bestimmen. Analog zu den oben behandelten Landau-Niveaus findet man hier ebenfalls Landau-Niveaus. Ihre Energie ist aber

$$E_{\pm} = \pm \hbar \omega_c \sqrt{n} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Sie liegen also nicht mehr äquidistant, außerdem gibt es ein Niveau schon bei  $E = 0$ . Die Niveaus mit  $n \geq 1$  sind wieder alle  $M$ -fach entartet. Dagegen ist das  $n = 0$  Niveau nur  $M/2$  fach entartet. Hinzu kommt neben der Spinentartung, die wir hier nicht diskutiert hatten, noch eine 2-fache Entartung die die 2 Untergitter betrifft (Pseudospin). Damit wird

$$\sigma_{xy} = \frac{c}{V_H} = 2 \times 2 \times \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{h} \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Das Ergebnis ist dass der Hall-Widerstand als Funktion der Fermi-Energie einen Sprung halber Höhe schon bei  $E_F = 0$  macht, gefolgt von ganzen Sprüngen bei den nächsten (nun nicht mehr äquidistanten) Landau-Niveaus. Das Bild sieht also charakteristisch anders aus, als wir es von gewöhnlichen 2-dimensionalen Systemen her kennen. Dieses Verhalten wurde im Experiment beobachtet.

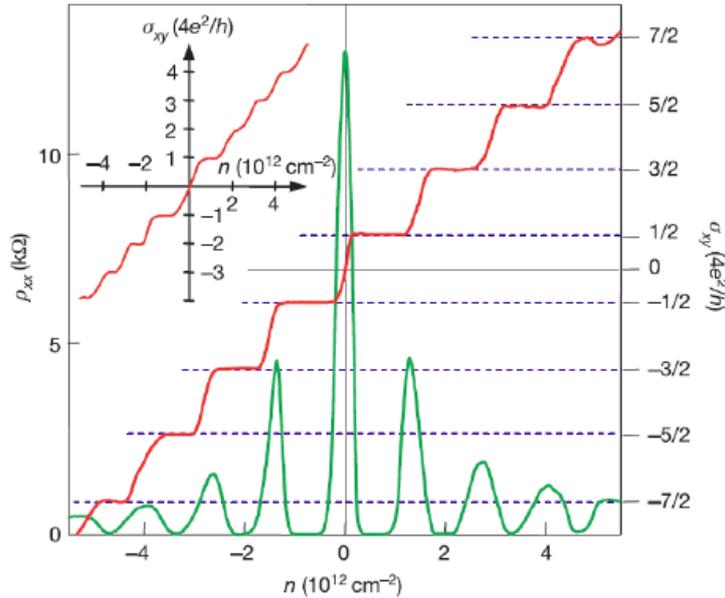


Abbildung 6.10: Graphen QHE

## 6.8 Kompressible und inkompressible Bereiche

Siehe Chklovskii, Shklovskii, and Glazman, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992)

Das bisher entwickelte Bild von Randkanälen ist immer noch zu idealisiert. Es geht davon aus, dass am Rand wo das Potenzial anwächst (wir gehen hier davon aus, dass dies kontinuierlich, also nicht sprunghaft passiert) auch die Landau-Niveaus nach oben gebogen sind und der Reihe nach von der Fermieenergie geschnitten werden. Die Niveaus unterhalb  $E_F$  sind besetzt, die darüber leer. Dies impliziert aber, dass sich die Elektronendichte mit dem Abstand vom Rand in Stufen ändert. Dies ist aber sicher nicht physikalisch. In der oben zitierten Arbeit wird daher das Problem selbstkonsistent analysiert, nämlich es wird berücksichtigt, dass die Elektronendichte über die Poisson-Gleichung das Potenzial beeinflusst. Dadurch wird der Potenzialverlauf am Rande stark verändert, wie in der Abbildung dargestellt. Es kommt zu einem Einrasten, derart, dass das Potenzial in gewissen Bereichen, den sogenannten "kompressiblen" Bereichen, konstant ist mit einem Wert derart dass die darüber liegenden Landau Niveaus jeweils mit anderen Landau-Niveaus weiter im Inneren der Probe zusammenfallen. Dazwischen ändert sich das Potenzial und die Landau-Niveaus kontinuierlich. Die Fermi-Energie fällt nun meist mit einem der Landau-Niveaus zusammen, das dann nur partiell gefüllt ist.

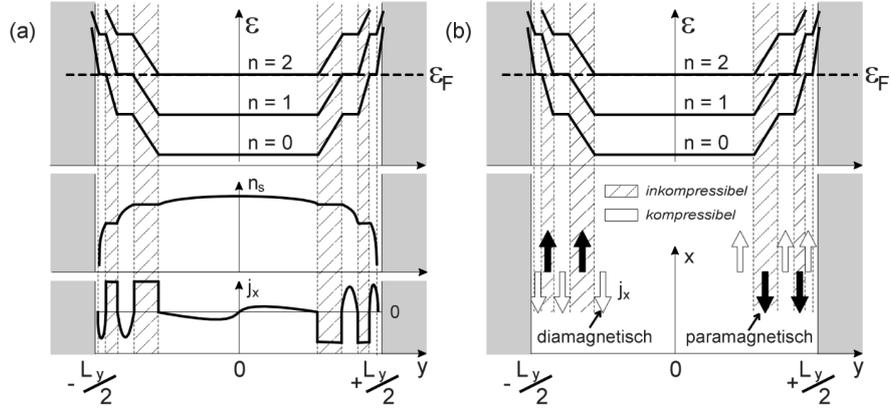


Abbildung 6.11: (a) Randmodell im Gleichgewicht nach Geller und Vignale. Die Spinaufspaltung ist nicht berücksichtigt, inkompressible Bereiche sind grau hinterlegt. Gezeigt sind die Verläufe des selbstkonsistenten elektrostatischen Potentials und der Elektronenkonzentration. Zusätzlich aufgeführt ist auch die lokale Stromdichte, die sich lokal in den einzelnen Streifen paramagnetisch ( $\propto dV(y)/dy$ ) oder diamagnetischen ( $\propto dns(y)/dy$ ) bei entgegengesetztem Vorzeichen verhält, wie in (b) nochmals deutlicher gekennzeichnet. (Quelle: Erik Ahlswede - Potential- und Stromverteilung beim Quanten-Hall-Effekt bestimmt mittels Rasterkraftmikroskopie)

Die Bezeichnung "kompressibel" hängt mit einer thermodynamischen Relation zusammen. Es gilt für die Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{V}{N^2} \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_{T,V}.$$

In den kompressiblen Bereichen ändert sich die Dichte  $n$  stark mit einer Veränderung des chemischen Potentials  $\mu$ , d.h. die Kompressibilität ist groß. Dazwischen ändert sich die Dichte (fast) nicht, und die Kompressibilität ist verschwindend klein.

In Experimenten, bei denen der Verlauf des elektrischen Potentials vermessen wird, sind diese abwechselnden kompressiblen und inkompressiblen Bereiche beobachtet worden.

Das Bild der kompressiblen und inkompressiblen Bereiche lässt auch die Frage, wo der Strom fließt, in neuem Licht erscheinen. Hier kann dies nicht genügend diskutiert werden. Wir wollen nur soviel betonen: Der Strom fließt **nicht** dort lokalisiert, wo wir es aufgrund des einfachen Randkanalbildes erwarten würden, nämlich scharf lokalisiert dort wo die (nicht selbstkonsistent bestimmten) Landau-Niveaus die Fermieenergie schneiden. Stattdessen fließt er in räumlich weit ausgedehnteren Bereichen. Auch dies wurde in Experimenten bestätigt.