

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. MarthalerBlatt 7
Besprechung, 16.12.13**1. Stromdichte**

(Extra)

In der Boltzmanntheorie lässt sich die Stromdichte definieren als

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -e \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -e \int d\epsilon N(\epsilon) \int \frac{d\hat{p}}{4\pi} \mathbf{v}(\hat{p}) f(\mathbf{r}, \hat{p}, \epsilon) \quad (1)$$

wobei $d\hat{p}$ die Integration über alle Richtungen von \mathbf{p} ist und $\hat{p} = \mathbf{p}/p$. Verwenden sie nun den Ansatz und die Ergebnisse aus Aufgabe 2 auf Aufgabenblatt 6 und zeigen sie damit, dass gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = e \int d\epsilon N(\epsilon) D \nabla f^{\text{l.e.}}(\mathbf{r}, \epsilon) \quad (2)$$

wobei D die auf Aufgabenblatt 6 definierte Diffusionskonstante ist.

2. Stromfluss im diffusiven Grenzfall

(3 Punkte)

Wir suchen nun die stationäre Lösung der Boltzmann-Gleichung im diffusiven Grenzfall in einer Dimension, $D \partial_x^2 f^{\text{l.e.}}(x, \epsilon) = 0$, im Bereich $0 < x < L$. Verwenden sie die Randbedingungen $f^{\text{l.e.}}(0, \epsilon) = f_L(\epsilon)$ und $f^{\text{l.e.}}(L, \epsilon) = f_R(\epsilon)$. $f_{L,R}$ sind dabei Gleichgewichtsverteilungen mit dem chemischen Potential $\mu_{L,R}$. Zeigen sie, dass die Stromdichte im Bereich $0 < x < L$ gegeben ist durch

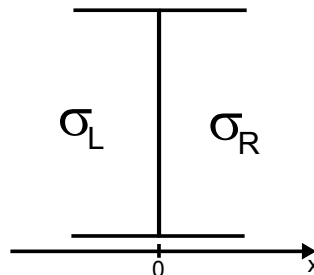
$$j = \sigma V / L \quad (3)$$

für $\mu_R - \mu_L = eV$ und finden sie die Leitfähigkeit σ . Wie immer können sie auch hier annehmen das die Zustandsdichte im relevanten Energiebereich konstant ist.

3. Diffusiver Transport durch Grenzschichten

(4 Punkte)

Genau wie in der vorhergehenden Aufgabe betrachten wir Transport in einer Dimension. Allerdings betrachten wir nun eine Struktur die aus zwei Materialien besteht die eine Grenzfläche habe an der Stelle $x = 0$. Für $x < 0$ haben wir dann die Leitfähigkeit σ_L und für $x > 0$ ist die Leitfähigkeit gegeben durch σ_R . Wir nehmen an, dass die Grenzfläche selbst keinen Widerstand hat. In diesem Fall muss $f^{\text{l.e.}}$ und j an der Grenzfläche stetig sein. Als Randbedingungen verwenden wir wieder $f^{\text{l.e.}}(-L, \epsilon) = f_L(\epsilon)$ und $f^{\text{l.e.}}(L, \epsilon) = f_R(\epsilon)$. $f_{L,R}$ sind Gleichgewichtsverteilungen mit Potential $\mu_{L,R}$. Berechnen sie $f^{\text{l.e.}}(x, \epsilon)$ im Bereich $-L < x < L$.



4. Diffusiver Transport durch eine FN-Grenzschicht (13 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Transport durch die Grenzschicht zwischen einem Ferromagneten und einem Normalmetal. In der Boltzmann-Gleichung muss nun der Spin-Freiheitsgrad beachtet werden. Die Boltzmann-Gleichung ist gegeben durch,

$$(\partial_t - D_\sigma \nabla^2) f_\sigma^{\text{l.e.}}(\mathbf{r}, \epsilon, t) = \frac{f_{\bar{\sigma}}^{\text{l.e.}}(\mathbf{r}, \epsilon, t) - f_\sigma^{\text{l.e.}}(\mathbf{r}, \epsilon, t)}{2\tau^\sigma} \quad (4)$$

wobei $\bar{\sigma}$ die entgegengesetzte Spinrichtung ist zu σ . Wir erlaube hierbei Prozesse die den Spin verändern. Dies kann z.B. durch magnetische Störstellen geschehen (siehe Blatt 3).

- (a) (6 Punkte) Zeigen sie, dass sich im stationären Grenzfall und in einer Dimension Gl. (4) schreiben lässt als

$$\partial_x^2 \mu_\sigma = \frac{\mu_\sigma - \mu_{\bar{\sigma}}}{2l_\sigma^2} \quad (5)$$

mit der Zerfallslänge $l_\sigma = \sqrt{D_\sigma \tau^\sigma}$. Zeigen sie ausserdem, dass die Stromdichte geschrieben werden kann als,

$$j_\sigma = e N_\sigma D_\sigma \partial_x \mu_\sigma = e \alpha l_\sigma^2 \partial_x \mu_\sigma \quad (6)$$

Hierbei ist μ_σ das ortsabhängige chemische Potential der Verteilungsfunktion $f_\sigma^{\text{l.e.}}$. Wir haben angenommen, dass die Spin-Zerfallszeit proportional ist zur Zustandsdichte, $\tau^\sigma = \alpha N_\sigma$ und wie immer ist die Zustandsdichte konstant.

- (b) (4 Punkte) Zeigen sie, dass Gl. (5) gelöst wird durch,

$$\begin{aligned} \mu_{\uparrow/\downarrow} &= \frac{l_\downarrow^2 (C_1 + C_2 x) + l_\uparrow^2 (C_3 + C_4 x)}{l_{\text{tot}}^2} \\ &\pm \frac{l_{\downarrow/\uparrow}^2}{l_{\text{tot}}^2} [(C_3 - C_1) \cosh(x/l) + l(C_4 - C_2) \sinh(x/l)] \end{aligned} \quad (7)$$

mit $l_{\text{tot}}^2 = l_\uparrow^2 + l_\downarrow^2$, $l = \sqrt{2} l_\uparrow l_\downarrow / l_{\text{tot}}$ und die Konstanten C_i ergeben sich durch die Randbedingungen.

- (c) (3 Punkte) Die Grenzschicht zwischen Normalmetal und Ferromagnet ist an der Stelle $x = 0$. Hierbei ist die Struktur Ferromagnetisch für $x < 0$ und Metallisch für $x > 0$. Im ferromagnetischen Bereich gilt $N_\uparrow \neq N_\downarrow$. Im metallischen Bereich gilt $N_\uparrow = N_\downarrow = N_N$ und $D_\uparrow = D_\downarrow = D_N$. Verwendet man die Randbedingungen erhält man das chemische Potential,

$$\begin{aligned} \mu_{\uparrow/\downarrow}(x > 0) &= \frac{e j x}{2\sigma_N} \pm \frac{\delta\mu}{2} e^{-x/l_N} \\ \mu_{\uparrow/\downarrow}(x < 0) &= \frac{e j x}{2\sigma_F} - \delta\mu (1 - e^{x/l}) \frac{l_\downarrow^2 - l_\uparrow^2}{2l_{\text{tot}}^2} \pm \frac{\delta\mu}{2} e^{x/l} \\ \sigma_N &= e^2 N_N D_N, \quad \sigma_F = e^2 (N_\uparrow D_\downarrow + N_\downarrow D_\uparrow) / 2 \\ \delta\mu &= \frac{2e j l_N (l_\downarrow^2 - l_\uparrow^2)}{2l_N l \sigma_F + l_{\text{tot}}^2 \sigma_N} \end{aligned} \quad (8)$$

Hierbei ist $l_N = \sqrt{\tau^N D_N}$ die Zerfallslänge im Normalmetal und $j = j_\uparrow + j_\downarrow$ ist der konstante Gesamtstrom. Berechnen sie $j_{\uparrow/\downarrow}$ im Ferromagnet und skizzieren sie $\mu_{\uparrow/\downarrow}$.