Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön

Dr. M. Marthaler

Blatt 6

Besprechung, 09.12.13

---

1. **Störstellenstreuung** (Extra)
   Wir betrachten eine Störstelle die an die Leitungselektronen koppelt. Die Störstelle wird beschrieben durch den Hamilton-Operator $H = V(\mathbf{r})$. Zeigen sie das die Streuraten für ein Elektronengas gegeben sind durch

$$W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar}|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}'}-\epsilon_{\mathbf{p}}) \tag{1}$$

   wobei $V(\mathbf{p})$ die Fouriertransformation ist von $V(\mathbf{r})$.

2. **Elektronentransport im Diffusiven limit** (11 Punkte)
   Wir betrachten die Boltzmangleichung für ein Elektronengas,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\right)f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} \tag{2}$$

   Das Stoßintegral soll für Störstellenstreuung ausgewertet werden. Mit den Raten $W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}$ aus der vorhergehenden Aufgabe, lässt sich das Stoßintegral schreiben als

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'}\left[W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}}))-W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}f(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\right] \tag{3}$$

   Für die Verteilungsfunktion $f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ verwenden wir ähnlich wie in der Vorlesung den Ansatz,

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f^{\text{l.e.}}(\mathbf{r},\epsilon_p,t)+\delta\mathbf{f}(\mathbf{r},\epsilon_p,t)\cdot\hat{p}\,. \tag{4}$$

   mit dem Einheitsvektor $\hat{p} = \mathbf{p}/p$. Hierbei ist $f^{\text{l.e.}}$ die Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht, und $\delta\mathbf{f}$ ist eine kleine Störung. Beide Verteilungsfunktionen hängen nun nicht mehr explizit von der Richtung von $\mathbf{p}$ ab.

   (a) (3 Punkte) Nehmen sie an, dass $V(\mathbf{r}) = v_0\delta(\mathbf{r})$ und zeigen sie, dass gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = -\frac{\delta\mathbf{f}(\mathbf{r},\epsilon_p,t)\cdot\hat{p}}{\tau(\epsilon_p)}. \tag{5}$$

   (b) (4 Punkte) Integrieren sie die Boltzmangleichung über alle Richtungen von $\hat{p}$ und zeigen sie, dass sich damit ergibt

$$\partial_t f^{\text{l.e.}}+\frac{1}{3}v\nabla\cdot\delta\mathbf{f} = 0 \tag{6}$$

   (c) (4 Punkte) Nehmen sie an, dass sie die Zeitableitung der Störung der Verteilungsfunktion, $\partial_t\delta\mathbf{f}$, vernachlässigen können. Zeigen sie, dass dann gilt

$$\left(\partial_t - D\nabla^2\right)f^{\text{l.e.}}(\mathbf{r},\epsilon_p,t) = 0 \tag{7}$$

   und finden sie die Diffusionskonstante D.
   Hinweis: Multiplizieren sie die Boltzmangleichung mit $\hat{p}$ und integrieren sie wieder über alle Richtungen von $\hat{p}$.

3. Tunnelstrom (9 Punkte)

Wir betrachten einen Tunnelkontakt der durch den Tunnel-Hamilton-Operator,

$$H_T = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} c^\dagger_{\mathbf{p},R} c_{\mathbf{p}',L} + \text{h.c.} \tag{8}$$

beschrieben wird. Der Index L (R) beschreibt Elektronen auf der linken (rechten) Seite des Tunnelkontaktes. D.h. der Tunnel-Hamilton-Operator vernichtet z.B. ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}'$ auf der linken Seite des Tunnelkontaktes und erzeugt ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}$ auf der rechten Seite des Tunnelkontaktes.

(a) (1 Punkt) Zeigen sie das die Tunnelraten von links nach rechts gegeben sind durch,

$$W^{L\to R}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} |t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}) \tag{9}$$

(b) (2 Punkte) Warum ist der Tunnelstrom von links nach rechts gegeben durch

$$I_{L\to R} = e \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W^{L\to R}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1 - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}}))\,, \tag{10}$$

wobei $f_{L(R)}$ die Fermi-Verteilungen auf der linken (rechten) Seite des Tunnelkontaktes ist? Wie sieht der Tunnelstrom von rechts nach links aus?

(c) (6 Punkte) Berechnen sie den Gesamtstrom durch den Tunnelkontakt. Nehmen sie dabei an, dass das Tunnelmatrixlement konstant ist $T = t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ und das für die chemischen Potentiale auf der linken und rechten Seite des Tunnelkontakes gilt, $\mu_L - \mu_R = eV$. Berechnen sie auch den Leitwert $G = dI/dV$.