Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön **Blatt 3**

Dr. M. Marthaler **Besprechung, 18.11.13**

---

1. Elektron-Phonon-Streuung (8 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Stoßraten für die Elektron-Elektron-Streuung betrachtet. Analog soll hier die Elektron-Phonon-Streuung untersucht werden. Diese wird durch den Hamilton-Operator

$$H_{el-ph} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma} g_{\mathbf{q}}^{el-ph} c^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma} c_{\mathbf{p},\sigma} (a_{\mathbf{q}} + a^{\dagger}_{-\mathbf{q}})$$

beschrieben.
Im Folgenden werden dabei Phononen im Debeyemodell betrachtet ($\hbar\omega_{\mathbf{q}} = c|\mathbf{q}|$).

(a) (4 Punkte) Bestimmen sie die Raten $W^{+}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}$ ($W^{-}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}$) für die Streuung von Elektronen von $\mathbf{p}\sigma$ nach $\mathbf{p}'\sigma$ unter Absorption (Emission) eines Phonons. Betrachten Sie die Matrixelemente

$$\langle n_{\mathbf{p}\sigma} = 0, n_{\mathbf{p}'\sigma} = 1, n_{\mathbf{q}} \mp 1 | H_{el-ph} | n_{\mathbf{p}\sigma} = 1, n_{\mathbf{p}'\sigma} = 0, n_{\mathbf{q}} \rangle \,,$$

und zeigen Sie, dass damit die Streuraten durch

$$W^{\pm}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} |g_{\mathbf{q}}^{el-ph}|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}} \mp \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \delta_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q},\mathbf{p}'} x^2_{\mathbf{q},\pm} \tag{1}$$

gegeben sind, mit der Definition $x_{\mathbf{q},+} = \sqrt{n_{\mathbf{q}}}$, $x_{\mathbf{q},-} = \sqrt{n_{\mathbf{q}} + 1}$.

(b) (1 Punkt) Erläutern Sie, warum die Lebensdauer eines Elektrons im Zustand $\mathbf{p}\sigma$ bei der Streuungen an Phononen durch die Rate

$$\tau^{-1}_{\mathbf{p}\sigma} = \sum_{\mathbf{p}'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{p}'\sigma})\big) (W^{+}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} + W^{-}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}) \tag{2}$$

bestimmt ist.

(c) (3 Punkte) Ersetzen Sie nun $n_{\mathbf{q}}$ durch die thermischen Besetzungszahlen $N_{\mathbf{q}} = \langle n_{\mathbf{q}} \rangle$ und zeigen Sie, dass dann $W^{+}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} / W^{-}_{\mathbf{p}'\sigma\to\mathbf{p}\sigma}$ der Bedingung des detailierten Gleichgewichts genügt.

(d) (Extra) Wir wollen nun eine explizite Lösung für die Lebensdauer $\tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma}$ im Grenzfall kleiner Temperaturen für ein freies entartetes Fermigas finden. Für die Kopplungskonstante soll dabei $g_{\mathbf{q}}^{el-ph} = g_0$ angenommen werden. Wir ersetzen auch wieder $n_{\mathbf{q}}$ durch die thermischen Besetzungszahlen $N_{\mathbf{q}} = \langle n_{\mathbf{q}} \rangle$. Nehmen sie an, genau wie in der Vorlesung für die Elektronen-Elektronen-Streuung diskutiert, dass die Impulserhaltung und die Winkelabhänigkeit in eine Konstante zusammengefasst werden kann (siehe Skript Seite II-13). Diskutieren sie für welche Energien $\epsilon_{\mathbf{p}}$ für $T = 0$ gilt $\tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma} \propto (\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F)^3$ (nehmen sie dabei an dass die Zustandsdichte um die Fermikante konstant ist). Versuchen zu dann zu zeigen das für Temperaturen $k_B T \ll \omega_D$ (ω_D ist die Debye-Frequenz) an der Fermikante ungefähr gilt $\tau^{-1}_{\mathbf{p}_F,\sigma} = \tau^{-1}(\epsilon_F) \propto T^3$.

2. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (3 Punkte)

Für einen Fermionischen Vielteilchenzustand sind die Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren definiert durch,

$$\begin{aligned} c_\lambda^\dagger|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle & (3)\\ c_\lambda|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle & (4)\\ c_\lambda^\dagger|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle &= c_\lambda|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle = 0 & (5)\end{aligned}$$

Zeigen sie damit, dass die die Operatoren c_λ und $c_\lambda^\dagger$ die Antivertauschungsrelation

$$\{c_\lambda, c_{\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{6}$$

erfüllen.

3. Streuung an einer magnetischen Störstelle (9 Punkte)

Wir betrachten nun die Streuung von Elektronen an einer magnetischen Störstelle. Die magnetische Störstelle befindet sich am Ursprung des Koordinatensystems $\mathbf{r}=0$. Die Störstelle hat einen Spin $\mathbf{S}$ und koppelt an die Spins $\mathbf{s}$ der Elektronen des Leitungsbandes. Dies kann durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben werden,

$$H_K = -J\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}\,\delta(\mathbf{r})\,. \tag{7}$$

Hierbei soll immer angenommen werden dass der Vektor $\mathbf{S}$ (kein Operator) sich bei einer Streuung nicht verändert.

(a) (3 Punkte) Schreiben die den Hamilton-Operator (7) in der Form der 2ten Quantisierung in der Basis der ebenen Wellen. Es kann dabei hilfreich sein wenn sie folgende Relation $\mathbf{S}\cdot\mathbf{s} = S_-s_+ + S_+s_- + S_zs_z$ benutzen. Eine andere möglichkeit den Hamilton-Operator (7) kompakt zu schreiben, besteht darin sich folgenden Vektor zu definieren,

$$\vec{c}_\mathbf{p} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p},\uparrow} \\ c_{\mathbf{p},\downarrow} \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

und den Hamilton-Operator in 2ter Quantisierung als Funktion dieses Vektors zu schreiben.

(b) (1 Punkt) Wie muss die Lebensdauer (2) modifiziert werden, wenn wir eine magnetische Störstelle betrachten?

(c) (2 Punkte) Berechnen sie nun die Streuraten $W_{\mathbf{p}\uparrow\to\mathbf{p}'\uparrow}$ und $W_{\mathbf{p}\uparrow\to\mathbf{p}'\downarrow}$.

(d) (3 Punkte) Finden sie eine explizite Form für die Lebensdauer $\tau_{\mathbf{p}\uparrow}^{-1}$ bei Temperatur $T=0$. Nehmen sie dabei an das wir Elektronen in einem freien Elektronengas betrachten.