

1 | Korrelationsfunktionen für Fermionen

Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}$, wobei die Operatoren $c_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ und $c_{\mathbf{k}}$ die Anti-Vertauschungsrelationen

$$\{c_{\mathbf{k}_1}, c_{\mathbf{k}_2}^{\dagger}\} = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}, \quad \{c_{\mathbf{k}_1}, c_{\mathbf{k}_2}\} = 0, \quad \{c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}_2}^{\dagger}\} = 0. \quad (1)$$

erfüllen, und $\epsilon_{\mathbf{k}}$ eine positive Funktion von $k = |\mathbf{k}|$ mit einem Minimum bei $k = 0$ ist. Der statistische Operator (die Dichtematrix) wird bei Gleichgewicht mit der inversen Temperatur $\beta = 1/k_B T$ und dem chemischen Potential μ gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H - \mu N)}, \quad \text{mit } N = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}, \quad \text{und } Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)}. \quad (2)$$

- a) Benutzen Sie das Hadamard-Lemma (4 Punkte)
 (welches von dem Baker-Campbell-Hausdorff Theorem hergeleitet werden kann)

$$e^X Y e^{-X} = e^{\text{ad}_X} Y = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!} [X, [X, Y]] + \dots, \quad (3)$$

wobei $\text{ad}_X = [X, \dots]$ als Super-Operator verstanden werden sollte, um die folgenden Relationen zu zeigen

$$c_{\mathbf{k}} \rho = e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \rho c_{\mathbf{k}}, \quad c_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rho = e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \rho c_{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (4)$$

Benutzen Sie diese Eigenschaften, zusammen mit den Anti-Vertauschungsrelationen (1) und der zyklischen Eigenschaft der Spur um die folgenden Korrelationsfunktionen zu berechnen

b) $\langle c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2} \rangle = \text{Tr}(c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2} \rho)$ und $\langle c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} \rangle = \text{Tr}(c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} \rho)$. (4 Punkte)

c) $\langle c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_3}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_4} \rangle = \text{Tr}(c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_3}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_4} \rho)$. (4 Punkte)

2 | Dichte-Dichte Korrelationsfunktion für das ideale Fermigas

Wir definieren die Feldoperatoren

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_{\mathbf{k}}, \quad \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (5)$$

Der Dichte-Operator ist dann definiert durch $n(\mathbf{r}) = \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$.

- a) Berechnen Sie den Mittelwert der Teilchendichte $\langle n(\mathbf{r}) \rangle = \text{Tr}(n(\mathbf{r}) \rho)$. (2 Punkte)

- b) Berechnen Sie die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion (6 Punkte)
 $\langle \Delta n(\mathbf{r}) \Delta n(\mathbf{r}') \rangle = \text{Tr}(\Delta n(\mathbf{r}) \Delta n(\mathbf{r}') \rho)$, wobei $\Delta n(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) - \langle n(\mathbf{r}) \rangle$. Schreiben Sie dabei die Summen über \mathbf{k} als Integrale, und berechnen diese für $T = 0$ und $\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.