Teil 1: Berechnung des Integrals im Exponenten

Im Verlauf der Rechnung verwenden wir $S(\omega) = \frac{c}{|\omega|}$ und $I = [-\omega_{\text{ir}}, \omega_{\text{ir}}]$, mit $\omega_{\text{ir}} > 0$ als infrarote Grenzfrequenz, ab der uns das Rauschen aufgrund endlicher Experimentdauer nicht mehr interessiert:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \langle X(t_1)X(t_2)\rangle \,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = -\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}\setminus I} \mathrm{e}^{-i\omega(t_1-t_2)} S(\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\
&= \frac{-c}{2}\int_{\mathbb{R}\setminus I} \frac{1}{-i\omega}\frac{1}{i\omega}\frac{1}{|\omega|}\left(\mathrm{e}^{-i\omega t}-1\right)\left(\mathrm{e}^{i\omega t}-1\right)\,\mathrm{d}\omega \\
&= -c\int_{\omega_{ir}}^{\infty} \frac{1}{\omega^3}(2-(\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{-i\omega t}))\,\mathrm{d}\omega \\
&= 2c\int_{\omega_{ir}}^{\infty} \frac{1}{\omega^3}(\cos(\omega t)-1)\,\mathrm{d}\omega \\
&\approx (c_1 + c_2\ln(\omega_{\text{ir}}t))t^2 \approx -\tilde{c}t^2,
\end{aligned}
$$

wobei $\tilde{c} > 0$. Es ist klar, dass $\tilde{c}$ für längere Experimente wegen einer kleineren Grenzfrequenz wächst.

Für im Ursprung reguläre Frequenzspektren findet man für große Zeiten $t \gg 1$, dass $-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \langle X(t_1)X(t_2)\rangle \,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \propto S(0)t$.

Teil 2: Zwei-Level-Fluktuatoren

In Zwei-Level-Systemen kennt man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma_z(t)\rangle = -\Gamma\langle\sigma_z(t)\rangle(1-D_0)$$

und analog findet man (mit $D_0 = 0$) die Relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma_z(t)\sigma_z(0)\rangle = -\Gamma\langle\sigma_z(t)\sigma_z(0)\rangle,$$

woraus

$$\langle\sigma_z(t)\sigma_z(0)\rangle = \mathrm{e}^{-\Gamma|t|}$$

folgt. Damit erhält man also:

$$\begin{aligned}
S_\Gamma(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-\Gamma|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{(i\omega-\Gamma)t} + \mathrm{e}^{-(i\omega+\Gamma)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\omega-\Gamma} - \frac{1}{i\omega+\Gamma}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\Gamma-i\omega} + \frac{1}{\Gamma+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma}{\omega^2+\Gamma^2}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten dann ein Zwei-Level-System mit einer Energiebarriere E_b, aus der statistischen Physik weiß man dann, dass die Rate Γ gegeben ist durch

$$\Gamma = \Gamma_0 \mathrm{e}^{-\frac{E_b}{k_B T}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}\Gamma} = -\frac{k_B T}{\Gamma}.$$

Wir wollen mehrere solcher Fluktuatoren betrachten, wobei die Energiebarriere dieser gleichverteilt sein soll, d. h.

$$P(E_b) = P_0 \cdot \Theta(E_b).$$

Um unser Frequenzspektrum zu erhalten mitteln wir über die Fluktuatoren und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_0^\infty S_\Gamma(\omega)\cdot P_0\,\mathrm{d}E_b \\
&= \int_{\Gamma_0}^{0} \frac{P_0}{\pi}\cdot\frac{\Gamma}{\omega^2+\Gamma^2}\cdot\frac{-k_B T}{\Gamma}\,\mathrm{d}\Gamma \\
&\overset{\Gamma_0\gg 1}{\approx} \frac{P_0 k_B T}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2+\Gamma^2}\,\mathrm{d}\Gamma \\
&= \frac{P_0 k_B T}{\pi}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{\omega^2}}{1+\left(\frac{\Gamma}{\omega}\right)^2}\cdot|\omega|\,\mathrm{d}\left(\frac{\Gamma}{|\omega|}\right) \\
&= \frac{P_0 k_B T}{|\omega|\pi}\arctan\left(\frac{\Gamma}{|\omega|}\right)\Bigg|_{\Gamma=0}^{\infty} \\
&= \frac{P_0 k_B T}{2}\cdot\frac{1}{|\omega|}
\end{aligned}$$

Dieses Modell liefert also eine mögliche Quelle für das so oft auftretende Rauschen, welches sich Reziprok zur Frequenz verhält.