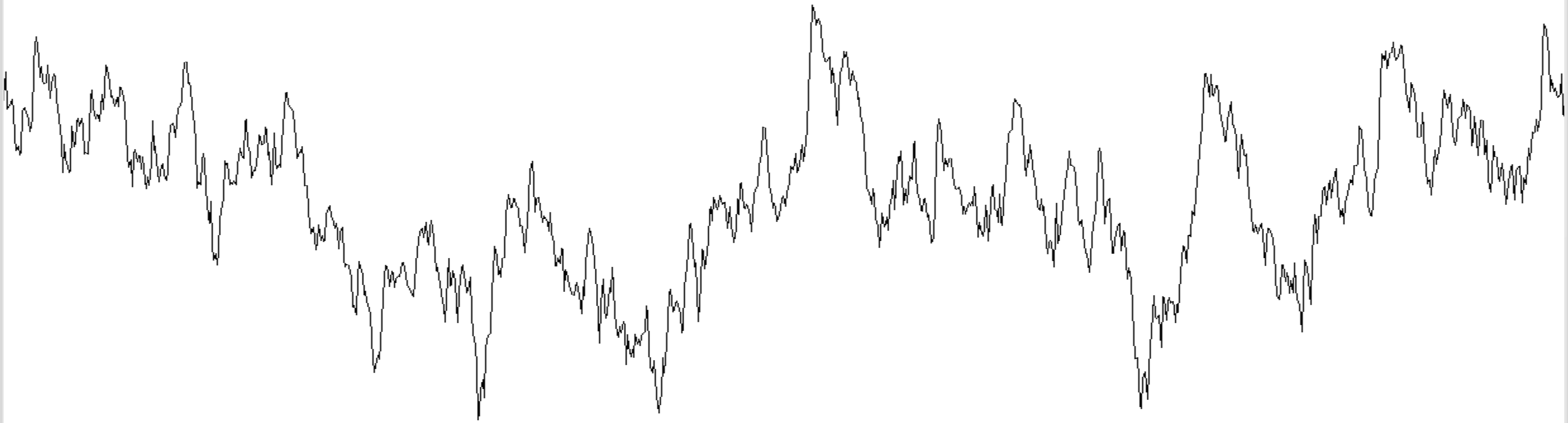
Rauschen und Dekohärenz III

Rechnerische Behandlung von Rauschen, Rauschquellen

HAUPTSEMINAR ZUM THEMA DER PHYSIK DES QUANTENCOMPUTERS
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK, FAKULTÄT FÜR PHYSIK



28.07.2012 Jan Reiner

Grundlagen des Problems

- Wir betrachten den Hamiltonoperator eines Qubits:

$$H(t) = \frac{1}{2}\Delta E(t)\sigma_z$$

- Hier ist beispielsweise $\Delta E(t) = \sqrt{\Delta^2 + E(t)^2},\ E \propto \phi + \delta\phi(t).$

- Wir entwickeln:

$$\begin{aligned} H(t) &\approx \frac{1}{2}\Delta E_0 \sigma_z + \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta E}{\partial \delta\phi}\delta\phi(t)\sigma_z \\ &=: \frac{1}{2}\Delta E_0 \sigma_z + \frac{1}{2}X(t)\sigma_z \end{aligned}$$

Eigenschaften der statistischen Variable

- Ihr Erwartungswert ist Null: $\langle X(t) \rangle = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$

- Sie ist stationär $(\Rightarrow \; \langle X(t_1) X(t_2) \rangle = \langle X(|t_1 - t_2|) X(0) \rangle \;)$ und gaußverteilt

- Eine wichtige Größe ist ihr Frequenzspektrum:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t} \langle X(t) X(0) \rangle \, \mathrm{d}t$$

Untersuchung bezüglich Dekohärenz

- Zur Erinnerung: $H(t) = \frac{1}{2}\left(\Delta E_0 + X(t)\right)\sigma_z$

- Relavant für Dekohärenz sind die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix:

$$\begin{aligned}
\rho_{\uparrow\downarrow}(t) &= \langle\uparrow|\mathrm{e}^{i\int_0^t H(t')\,\mathrm{d}t'}\rho(0)\,\mathrm{e}^{-i\int_0^t H(t')\,\mathrm{d}t'}|\downarrow\rangle \\
&= \mathrm{e}^{i\Delta E_0 t}\mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'}\rho_{\uparrow\downarrow}(0)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \;\; \langle\rho_{\uparrow\downarrow}(t)\rangle = \mathrm{e}^{i\Delta E_0 t}\langle\mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'}\rangle\rho_{\uparrow\downarrow}(0)$$

Quasistatische Näherung

- Wir nehmen an, das Frequenzspektrum sei von langsamen Frequenzen dominiert. Dann ist die Rauschgröße während eines Messprozesses näherungsweise konstant und wir mitteln nach der Zeitentwicklung mit Hilfe der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iXt} \cdot \frac{1}{\Delta X\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X}{\Delta X}\right)^2} \mathrm{d}X \\
&= \frac{1}{\Delta X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{X}{\sqrt{2}\Delta X} - \frac{i\Delta X t}{\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta X^2 t^2}{2}} \mathrm{d}X \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\Delta X^2 t^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \rho_{\uparrow\downarrow}(t) \rangle = \mathrm{e}^{i\Delta E_0 t} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta X^2 t^2}{2}} \rho_{\uparrow\downarrow}(0)$$

Isserlis‘ Theorem für gaußverteilte Variablen

$$\begin{aligned}\langle X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)\rangle = &\langle X(t_1)X(t_2)\rangle \cdot \langle X(t_3)X(t_4)X(t_5)\ldots X(t_n)\rangle \\ &+ \langle X(t_1)X(t_3)\rangle \cdot \langle X(t_2)X(t_4)X(t_5)\ldots X(t_n)\rangle \\ &+ \ldots \\ &+ \langle X(t_1)X(t_n)\rangle \cdot \langle X(t_2)X(t_3)X(t_4)\ldots X(t_{n-1}\rangle\end{aligned}$$

Induktiv erkennt man:

- Für ungerade n gilt: $\langle X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)\rangle = 0$, da $\langle X(t_i)\rangle = 0 \;\forall i \in \{1,\ldots,n\}$
- Für gerade n lässt sich $\langle X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)\rangle$ als Term von $(n-1)\cdot(n-3)\cdot ... \cdot 3$ Summanden schreiben, welche ein Produkt von $\frac{n}{2}$ Autokorrelatoren sind

Genauere Betrachtung des Dekohärenzterms

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'} \rangle &= 1 + i\int_{[0,t]} \langle X(t_1)\rangle\,\mathrm{d}t_1 + \frac{1}{2}i^2 \int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}i^3 \int_{[0,t]^3} \langle X(t_1)X(t_2)X(t_3)\rangle\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_3 \\
&\quad + \frac{1}{4!}i^4 \int_{[0,t]^4} \langle X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)\rangle\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_4 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\
&\quad + \frac{1}{4!}\int_{[0,t]^4} \langle X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)\rangle\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_4 \\
&\quad - \frac{1}{6!}\int_{[0,t]^6} \langle X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)X(t_5)X(t_6)\rangle\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_6 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\
&\quad + \frac{1}{4!}\int_{[0,t]^4} \big(\langle X(t_1)X(t_2)\rangle\cdot\langle X(t_3)X(t_4)\rangle + \langle X(t_1)X(t_3)\rangle\cdot\langle X(t_2)X(t_4)\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle X(t_1)X(t_4)\rangle\cdot\langle X(t_2)X(t_3)\rangle\big)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_4 - \ldots
\end{aligned}
$$

Genauere Betrachtung des Dekohärenzterms

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'} \right\rangle &= 1 - \frac{1}{2}\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\
&\quad + \frac{1}{4!}\int_{[0,t]^4} \big(\langle X(t_1)X(t_2)\rangle \cdot \langle X(t_3)X(t_4)\rangle + \langle X(t_1)X(t_3)\rangle \cdot \langle X(t_2)X(t_4)\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle X(t_1)X(t_4)\rangle \cdot \langle X(t_2)X(t_3)\rangle\big)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_4 - \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \frac{3}{4!}\left(\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^2 \\
&\quad - \frac{5\cdot 3}{6!}\left(\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^3 + \ldots \\
&= 1 + \frac{-1}{2}\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left(\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{-1}{2}\right)^3\left(\int_{[0,t]^2} \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Genauere Betrachtung des Dekohärenzterms

- Es gilt also:

$$\left\langle \mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'} \right\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}$$

Zusammenfassung

- Entwicklung des Hamiltonoperators nach der Störgröße, identifizieren von Sweet Spots/Symmetriepunkten

- Quasistatische Näherung

- $\left\langle \mathrm{e}^{i\int_0^t X(t')\,\mathrm{d}t'} \right\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \langle X(t_1)X(t_2)\rangle\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}, \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t}\langle X(t)X(0)\rangle\,\mathrm{d}t$

- Fluktuation zwischen zwei Zuständen als Quelle für 1/f-Rauschen