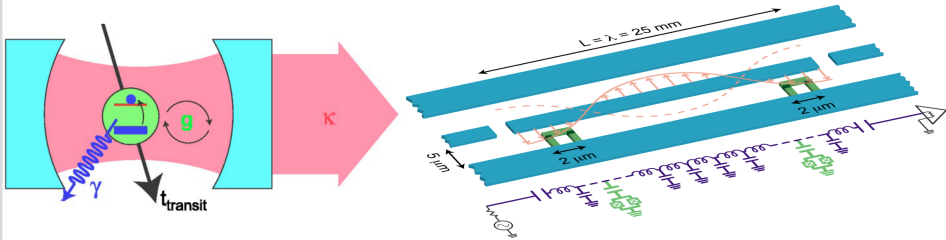


Quantenelektrodynamik mit supraleitenden Schaltkreisen I

Hauptseminar: Physik des Quantencomputers

Iris Conradi



Cavity QED: Quantenoptik

- Atom in einem Resonator

- Eigenzustände des Jaynes-Cummings Hamilton Operators

- kein Detuning ($\Delta = 0$)

- dispersiv ($g/\Delta \ll 1$)

Circuit QED

- Experiment

- Vorteile

1 Qubit Gatter

- Bit-flip Gatter

- Phase Gatter

2 Qubit Gatter

- Hamiltonoperator

- Experiment

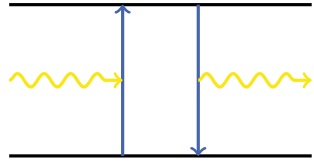
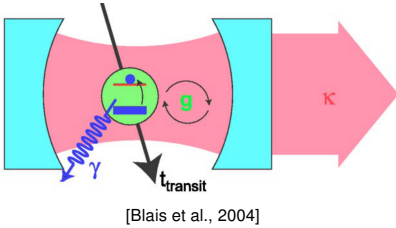
Zusammenfassung

Motivation:

Ein Qubit als Zweizustandssystem ähnelt einem Atom.

Atom im Resonator: Wechselwirkung

Frage: Was passiert mit einem Qubit in einem Resonator?



$$H = \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g \left(a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a \right) + H_\kappa + H_\gamma \quad (1)$$

ohne Dämpfung: Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator

Resonator Resonanzfrequenz ω_r (nur eine Mode!)

Atom Zweizustandssystem, ω_a

Kopplung Stärke g ($\propto$ Dipolmoment des Atoms und elektrischem Feld der Photonen), Atom anregen dafür Photon weg und andersrum

κ Resonator kann Photonen verlieren, Rate κ

γ angeregtes Atom fällt in GZ ohne Photon zu emittieren oder andere Frequenz, Rate γ

Starke Kopplung $g \gg \kappa, \gamma$

→ ohne Dämpfung: Jaynes-Cummings

Eigenzustände des Jaynes-Cummings Hamilton Operators

$$|GZ\rangle = |g, 0\rangle \quad (2)$$

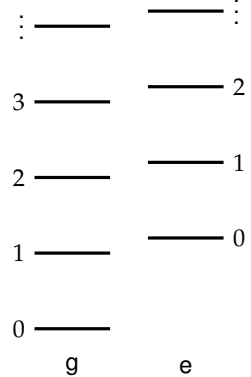
$$|+, n+1\rangle = \cos \theta_n |e, n\rangle + \sin \theta_n |g, n+1\rangle \quad (3)$$

$$|-, n+1\rangle = -\sin \theta_n |e, n\rangle + \cos \theta_n |g, n+1\rangle \quad (4)$$

$$E_{\pm, n+1} = (n+1)\hbar\omega_r \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{4g^2(n+1) + \Delta^2} \quad (5)$$

$$E_{GZ} = -\frac{\hbar\Delta}{2} \quad (6)$$

$$\Delta = \omega_a - \omega_r \quad \theta_n = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta} \right) \quad (7)$$



Eigenzustände Mischung aus Atom angeregt mit n Photonen und Atom in GZ mit n+1 Photonen

in Abbildung: Eigenenergien ohne Kopplung (mit leichtem Detuning) → GZ bleibt GZ, aber angeregte auf (etwa) einer Ebene geben gemischt (symmetrisch und antisymmetrisch) die neuen angeregten Zustände

Eigenenergien Der Vollständigkeit halber...

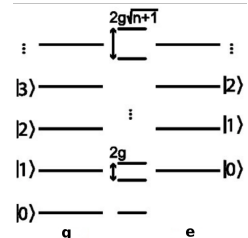
Δ Detuning

θ_n Mischungswinkel

$$\tan(2\theta_n) = \infty \Rightarrow \sin \theta_n = \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

$$|\pm, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 1\rangle \pm |e, 0\rangle) \quad (9)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, 1\rangle \cdot e^{-igt} - |-, 1\rangle \cdot e^{igt}) \quad (10)$$



[Blais et al., 2004]

➡ Anregung wechselt zwischen Atom und Resonator

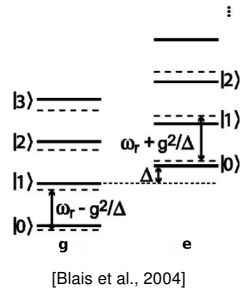
- kein Detuning: Resonator in Resonanz mit Atom
- Energielevels des ungekoppelten entartet
- Mischungswinkel festgelegt
- Zustände: maximale Verschränkung
- nur eine Anregung betrachten
- wenn man ein angeregtes Atom hat $|e, 0\rangle$: Zustand ist Kombination aus $|\pm, 1\rangle$, Zeitentwicklung angegeben $\rightarrow$ für $2gt = \pi$ hat man $|g, 1\rangle$
 $\rightarrow$ Vakuum-Rabi-Oszillation (Frequenz $\propto g$)
 (nur wenn Kopplung stark $g \gg \kappa, \gamma$)
- $\rightarrow$ Anregung wechselt zwischen Atom und Resonator

$$\arctan x \approx x \quad \text{für } x \ll 1 \quad (11)$$

$$\Rightarrow \sin \theta_n \approx \frac{g}{\Delta}, \quad \cos \theta_n \approx 1 \quad (12)$$

$$|-, 1\rangle \approx -\frac{g}{\Delta} |e, 0\rangle + |g, 1\rangle \quad (13)$$

$$|+, 1\rangle \approx |e, 0\rangle + \frac{g}{\Delta} |g, 1\rangle \quad (14)$$



➡ Anregung wechselt nicht zwischen Atom und Resonator

- dispersiv: sehr großes Detuning
- in Abbildung: ungekoppelt plus gekoppelt (lang gestrichelte Linien)
- Eigenzustände sind die ungekoppelten Zustände plus kleine Korrekturen

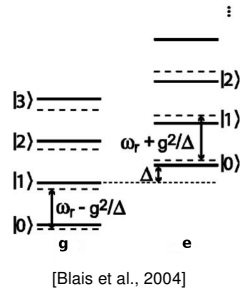
→ Anregung wechselt nicht zwischen Atom und Resonator

unitäre Transformation

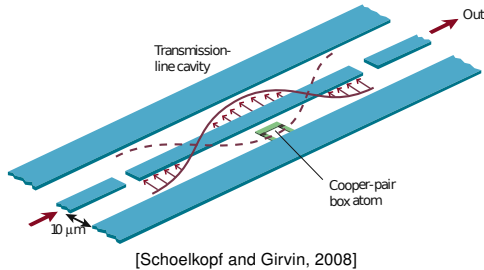
$$U = \exp \left(\frac{g}{\Delta} (a\sigma_+ - a^\dagger \sigma_-) \right) \quad (15)$$

bis zur zweiten Ordnung in g ergibt

$$UHU^\dagger \approx \hbar\omega_r a^\dagger a + \left(\frac{\hbar\omega_a}{2} + \hbar \frac{g^2}{\Delta} \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \right) \sigma_z \quad (16)$$



- dispersiv: kein Austausch der Anregungen: durch unitäre Transformation bis zweiter Ordnung wird Hamilton genähert unter Ausnutzung von ($g/\Delta \ll 1$) (nur $UHU^\dagger$ weil die Transformation nicht von der Zeit abhängt)
- also ist die Kopplung durch Austausch nicht mehr drin aber
- Veränderung der Frequenz des Atoms
 - Lamb-Shift der Term $\hbar g^2/2\Delta$
 - Stark-Shift der Term $(\hbar g^2/\Delta) a^\dagger a$
 - hängt ab von der Population des Resonators (Anzahl Photonen) (→Kopplung...)
- Energien
 - Null Photonen Verschiebung um $\pm$ Lambshift
 - Photonen Verschiebung um $\pm$ Kombination aus Lambshift und entsprechendem Starkshift



$$H_Q = -2E_C(1 - 2N_g)\tilde{\sigma}_z - \frac{E_J}{2} \cos\left(\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)\tilde{\sigma}_x \quad \text{mit} \quad N_g = \frac{C_g}{2e}V_g \quad (17)$$

$$H_R = \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

$$\text{Kopplung: } V_g = V_g^{dc} + \sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}(a^\dagger + a) \quad (19)$$



Neuer Abschnitt: Jetzt ersetzen wir Atom durch Qubit und verwenden einen 1D Wellenleiter

- innere Länge: Wellenlänge zu ω_r
- Eingang, Ausgang kapazitiv gekoppelt
- Ground Potential außen
- Qubits an Extrema der stehenden Welle
- Qubit: Cooper-Pair-Box mit einem Ring aus zwei Junctions an Stelle der einen Junction → man kann dadurch den σ_x Term steuern, den anderen sowieso über die Gate-Spannung
- heute mit Transmons
- Resonator: harm. Oszi
- Kopplung: Potential auf Insel: angelegte Gatespannung und durch Feld im Resonator (L: Länge des Resonators, c: Kapazität pro Länge)

Rechnung...

→ Jaynes-Cummings Form

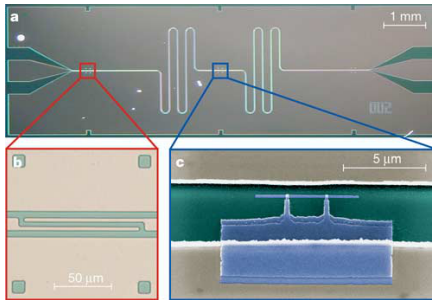
$$H = \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g \left(a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a \right) \quad (20)$$

mit

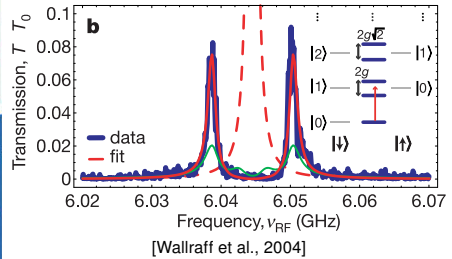
$$g = e \frac{C_g}{C_\Sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}} \sin \theta \frac{1}{\hbar} \quad (21)$$

$$\omega_a = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\left(E_J \cos \frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0} \right)^2 + (4E_C(1 - 2N_g^{dc}))^2} \quad (22)$$

Jaynes-Cummings!

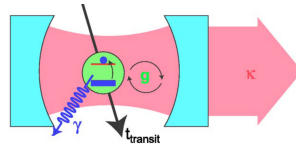


[Wallraff et al., 2004]

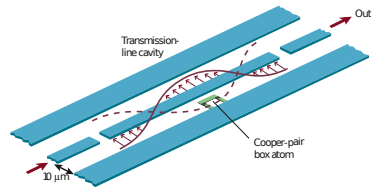


Links:

- a: gesamtes System: Resonator, Anschlüsse, Cooper-Pair-box
- b: kapazitive Kopplung zu Eingang und Ausgang
- c: Cooper-Pair-box (blau) zwischen Ground und mittlerem Leiter (jeweils beige)
- Länge des Resonators: 24mm
- Rechts: $\Delta = 0$ (rot gestrichelte Linie: berechnetes Ergebnis für $g = 0$)
→ man kann also starke Kopplung erreichen (Linienbreite bei $\Delta = 0$ ist durch $\frac{\kappa + \gamma}{2}$ gegeben. Wenn starke Kopplung, dann kann man das Splitting auflösen)
- In den neueren Experimenten wird größeres Splitting erreicht (Fink 2008)
- in Fink 2008 auch das Splitting für höhere Photonen Zustände gemessen um $\sqrt{n}$ Abhängigkeit nachzuweisen



[Blais et al., 2004]



[Schoelkopf and Girvin, 2008]

- Starke Kopplung viel leichter erreichbar als im Fall des Atoms, wichtig für Quanteninformation weil Information mehrfach zwischen Resonator und Qubit ausgetauscht werden kann, bevor sie verloren geht.
- Atome bewegen sich im Resonator oder fallen nur durch. Qubit ist fest → feste Feldstärke etc.
- Umgebungsrauschen koppelt nicht direkt an Qubit sondern nur über Resonator, andere Frequenzen als ω_r haben aber nur einen Effekt, wenn sie mit großen Feldstärken verbunden sind.

Dispersives Regime ($g/\Delta \ll 1$):

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \left(\frac{\hbar\omega_a}{2} + \hbar\frac{g^2}{\Delta} \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \right) \sigma_z \quad (23)$$

definiere

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a + \chi \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{g^2}{\Delta} \quad (24)$$

sodass

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \left(\frac{\hbar\tilde{\omega}_a}{2} + \hbar\frac{g^2}{\Delta} a^\dagger a \right) \sigma_z \quad (25)$$

- Arbeit in dispersivem Regime
- also großes Detuning zwischen Resonator und Atom
- Warum?:
 - kein Austausch der Anregungen, denn man will die Anregung im Qubit halten um daran Operationen durchzuführen
 - nur selten Photonen im Resonator: können auch nicht verloren gehen
- Lamb Shift: neue Frequenz $\tilde{\omega}_a$
- man kann ein treibendes Feld anlegen um Gatter zu realisieren
- das dann weit weg von Resonatorfrequenz und daher mit hoher Feldstärke
- kann man daher als klassisches Feld betrachten
- mittlere Photonenzahl Null: $a^\dagger a$ Term vernachlässigen

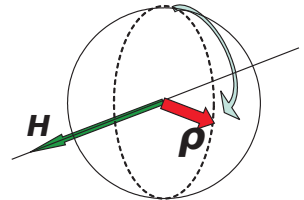
treibendes Feld: $\omega_d \approx \omega_a$, Amplitude ε

$$H = \frac{\hbar \tilde{\Delta}_a}{2} \sigma_z + \frac{\hbar \Omega_R}{2} \sigma_x \quad (26)$$

wobei

$$\tilde{\Delta}_a = \tilde{\omega}_a - \omega_d \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a + \chi \quad (27)$$

$$\chi = \frac{g^2}{\Delta} \quad \Omega_R = 2 \frac{\varepsilon g}{\Delta_r} \quad \Delta_r = \omega_r - \omega_d \quad (28)$$



[Wendin and Shumeiko, 2005]

- treibendes Feld über Eingang, dass in Resonanz mit dem Qubit ist
- Atom mit klassischem Feld in Resonanz treiben ➡ Rabi-Oszillation
- denn $\tilde{\Delta}_a$ ist fast Null (da χ sehr klein ist, weil dispersiv)
- man erhält den Hamilton durch Transformation in ein Bezugssystem, das mit ω_d rotiert

→ Rotationen um die x-Achse der Blochkugel (Rate Ω_R)

Durch variieren von $\tilde{\Delta}_a$ und Ω_R können auch alle andere Rotationen erreicht werden.

Mehrere Qubits:

wenn die Qubits verschiedene Frequenzen ω_a haben, kann man sie einzeln über die Einstellung von ω_d ansteuern. Man kann sie sogar gleichzeitig rotieren lassen.

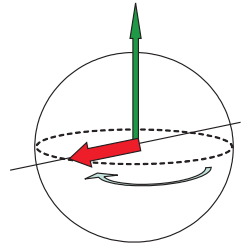
treibendes Feld: $\omega_d \neq \omega_a$, Amplitude ε

$$H = \frac{1}{2} \left(\tilde{\Delta}_a + \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2}{\Delta_a} \right) \sigma_z \quad (29)$$

wobei

$$\tilde{\Delta}_a = \tilde{\omega}_a - \omega_d \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a + \chi \quad (30)$$

$$\chi = \frac{g^2}{\Delta} \quad \Omega_R = 2 \frac{\varepsilon g}{\Delta_r} \quad \Delta_r = \omega_r - \omega_d \quad (31)$$



[Wendin and Shumeiko, 2005]

- treibendes Feld über Eingang, dass nicht in Resonanz mit dem Qubit ist (keine Übergänge im Qubit, $\tilde{\Delta}_a$ und Δ_a sind groß gegen 1)
- Δ_r ist immer noch groß (keine Photonen im Resonator)
- letzter Term: Stark Shift

→ Rotationen um die z-Achse der Blochkugel

Bemerkung:

Rate: $2g\sqrt{\bar{n}} \frac{\Omega_R}{2\Delta_a}$,

$\frac{\Omega_R}{2\Delta_a}$ muss klein sein, damit es keine echten Übergänge gibt, mittlere Photonenzahl und Kopplung kann variiert werden

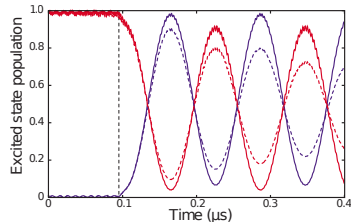
Mehrere Qubits:

wenn man bestimmte Qubits treibt (Bit-flip-Gatter), dann erhalten die anderen einen Stark-Shift

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \sum_{j=1,2} \frac{\hbar\tilde{\omega}_{a_j}}{2} \sigma_{z_j} + \frac{g_1 g_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{2\Delta_1 \Delta_2} (\sigma_{+1} \sigma_{-2} + \sigma_{-1} \sigma_{+2}) \quad (32)$$

➡ $\sqrt{i\text{SWAP}}$ -Gatter nach $t = \frac{\pi\Delta_1\Delta_2}{2g_1g_2(\Delta_1+\Delta_2)}$

$$U_{\sqrt{i\text{SWAP}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

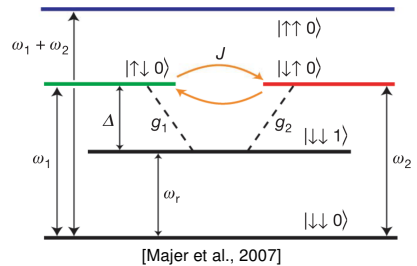
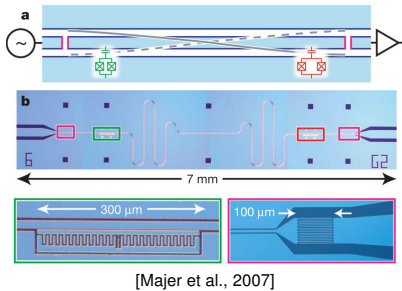


[Blais et al., 2007]

- auch in dispersivem Regime (keine Photonen vorhanden)
- Hamilton für dispersives Regime durch Transformation erhalten (Näherung weil nur bis zweite Ordnung in g), jetzt den Hamilton für zwei Qubits entsprechend Transformieren
- die Kopplung ist nur noch zwischen den Qubits (durch virtuelle Photonen) → $\sqrt{i\text{SWAP}}$ -Gatter
- mit den Rotationen: universelles Set von Quanten-Gattern
- Wie schaltet man das Gatter an?
 - wenn $\tilde{\omega}_{a_j}$ sehr verschieden: Energieerhaltung verbietet den SWAP
 - durch Fluss durch die Qubits kann man die Frequenzen separat steuern: bei Cooper-Pair-box schlecht wegen Dephasing, geht aber bei Transmons
- Problem: Rate: wie $\frac{g^2}{\Delta}$, also langsam. Man kann von dispersivem Regime weggehen, dann wird es schneller, aber dann kann es unerwünschte Verschränkungen mit den Photonen im Resonator geben
- *Mehrere Qubits*: man kann sie paarweise gleichzeitig verschränken oder auch mehr als 2 Qubits miteinander verschränken
- Abb: Simulation, zwei Qubits, nach 0.1: driving an, gestrichelt: mit Dämpfung

2 Qubit Gatter

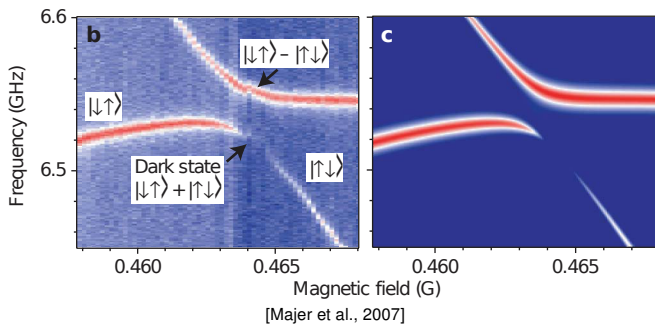
Experiment



- Links:
 - oben: Schaltung (Resonator mit zwei Transmons; pink: kapazitive Kopplungen)
 - mitte: Mikroskopaufnahme der Schaltung
 - unten links: Transmon
- Rechts:
 - dispersiv
 - Kopplung der Zustände mit jeweils einem angeregten und einem nichtangeregten Qubit über ein virtuelles Photon (letzter Term im Hamilton)
 - diese Wechselwirkung führt zu einer Aufspaltung der entarteten Energieniveaus

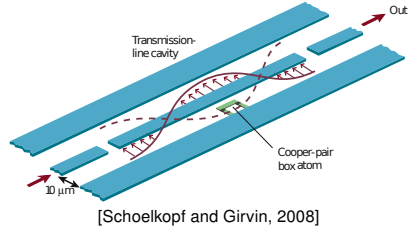
2 Qubit Gatter

Experiment



Levelaufspaltung aufgrund der Kopplung der beiden Zustände
links Messung, rechts Simulation

- bekannt aus Quantenoptik
- Herstellung
- universelles Set von Quantengattern
- experimentell realisiert



- System in Quantenoptik schon sehr genau untersucht
- Herstellungs Technologien schon erprobt (IC-Herstellung)
- universelles Set von Quantengattern (Rotationen und Verschränkung durch SWAP)
- lässt sich experimentell realisieren

- [Blais et al., 2007] Blais, A., Gambetta, J., Wallraff, A., Schuster, D., Girvin, S., Devoret, M., and Schoelkopf, R. (2007).
Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics.
Physical Review A, 75(3):032329.
- [Blais et al., 2004] Blais, A., Huang, R., Wallraff, A., Girvin, S., and Schoelkopf, R. (2004).
Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation.
Physical Review A, 69(6):062320.
- [Fink et al., 2008] Fink, J., Göppl, M., Baur, M., Bianchetti, R., Leek, P., Blais, A., and Wallraff, A. (2008).
Climbing the jaynes–cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity qed system.
Nature, 454(7202):315–318.

- [Majer et al., 2007] Majer, J., Chow, J., Gambetta, J., Koch, J., Johnson, B., Schreier, J., Frunzio, L., Schuster, D., Houck, A., Wallraff, A., et al. (2007).
Coupling superconducting qubits via a cavity bus.
Nature, 449(7161):443–447.
- [Schoelkopf and Girvin, 2008] Schoelkopf, R. and Girvin, S. (2008).
Wiring up quantum systems.
Nature, 451(7179):664–669.
- [Wallraff et al., 2004] Wallraff, A., Schuster, D., Blais, A., Frunzio, L., Huang, R., Majer, J., Kumar, S., Girvin, S., and Schoelkopf, R. (2004).
Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics.
Nature, 431(7005):162–167.
- [Wendin and Shumeiko, 2005] Wendin, G. and Shumeiko, V. S. (2005).
Superconducting quantum circuits, qubits and computing.
eprint arXiv:cond-mat/0508729.