Universelle Quantengatter

Physik des Quantencomputers

Alexander Jakub Kwiatkowski

Fakultät für Physik,
KIT

24. April 2012

Gliederung

Wozu Quantencomputer?

Vorteile die durch Quantencomputer erzielt werden können:

- Schnellere Berechnung bestimmter Aufgaben
- Besseres Verständnis von komplexen Quantensystemen durch verbesserte Simulation
- Abhörsichere Datenübertragung
- Reduzierung des Kommunikationsaufwand bei paralleler Berechnung

C.H. Bennett & D.P. DiVincenzo, Nature **404**, *S.247 (2000)*

Kriterien für einen Quantencomputer

Um einen Quantencomputer bauen zu können müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Register mit N Qubits
2. Initialisierung des Registers auf den Grundzustand
3. 1-& 2-Qubit-Gatter zur Manipulierung der Qubits
4. Möglichkeit den Wert eines Qubits auszulesen
5. Lange Kohärenzzeit der Qubits gegenüber der benötigten Zeit um ein beliebiges Gatter anzuwenden

D.P. DiVincenzo: "The physical implementation of quantum computation", Fortschritte der Physik **48**, *S.773ff (2000)*

Unterschiede zwischen klassischen Bits und Qubits

	klassisches Bit	Qubit
Anzahl unterschiedlicher Zustände eines Bit	2	∞
Zustand bestimmbar	Ja	Nein
Einfluss des Auslesen	Keiner	Nach Auslesen befinden sich das Qubit im Zustand $\|0\rangle$ oder $\|1\rangle$
Kopieren und löschen	Immer möglich	Nur in den Zuständen $\|0\rangle$ und $\|1\rangle$ möglich.
Benötigter Speicherplatz zur Simulation von n Qubits auf einem klassischen Computer		c^n

M.A.Nielsen & I.L.Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambrigde University Press (2010)

Zustandsraum eines Qubits: die Blochkugel

Eine Realisierung eines Qubits ist der Spin eines Spin-1/2-Teilchens (z.B. ein Elektron).
Zustand eines Qubits:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

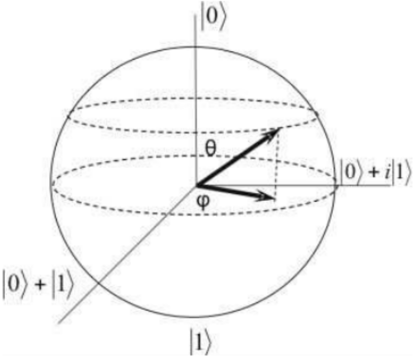
mit Normierungsbedingung

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Daraus folgt die Blochdarstellung:

$$|\psi\rangle = e^{i\rho} cos(\tfrac{\theta}{2})\,|0\rangle + e^{i(\phi+\rho)} sin(\tfrac{\theta}{2})\,|1\rangle$$
$$\hat{=} cos(\tfrac{\theta}{2})\,|0\rangle + e^{i\phi} sin(\tfrac{\theta}{2})\,|1\rangle$$

darstellen.



G.Wendin & V.S.Shumeiko, arXiv:cond-mat/0508729, S.4 (2005)

Grundlegende Funktionsweise Quantengatter

Manipulation von Qubits wird über die Kontrolle des dazu gehörigen Hamiltonoperators H(t) erreicht.
Der Zustand eines Qubits entwickelt sich gemäß der Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H(t)|\psi\rangle$$

Allgemeiner Zeitentwicklungsoperator:

$$U(t,t_0) = Te^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t)dt}$$

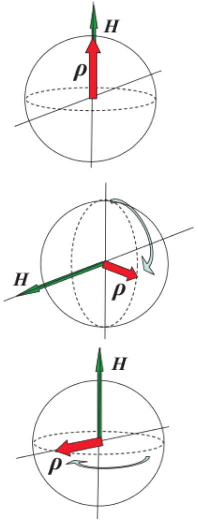
mit der Eigenschaft: $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$
Bei Hamiltonenoperatoren die zeitunabhängig sind gilt:

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

Rotation um eine Achse

Jede Operation die nur ein Qubit beeinflusst, ist als eine Drehung um eine geeignet gewählte Achse darstellbar, kann aber auch über mehrere Rotationen über zwei feste Achsen (z.B. x- und y-Achse) erzielt werden.

Eine Rotation wird über ein Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{n}$ erzeugt, wobei $\vec{n}$ die Rotationsachse ist.
Hamiltonoperator: $H = -g \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \vec{S} = -\frac{g \mu B_0}{2} \vec{n} \vec{\sigma}$.
Zeitentwicklung:
$U(t) = e^{i \frac{g \mu B_0 t}{2} \vec{n} \vec{\sigma}} = cos(\frac{g \mu B_0 t}{2}) I + isin(\frac{g \mu B_0 t}{2}) \vec{n} \vec{\sigma}$,
mit Drehwinkel $\phi = g \mu B_0 t$.



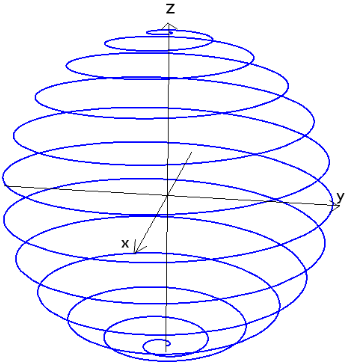
G.Wendin & V.S.Shumeiko,

arXiv:cond-mat/0508729, S.9

Rabi-Oszillation

Ein Qubit komplett von jeglichem Magnetfeld abzuschirmen ist in der Praxis schwierig. Um dieses Problem anzugehen, kann man die Rabi-Oszillationen ausnützen:

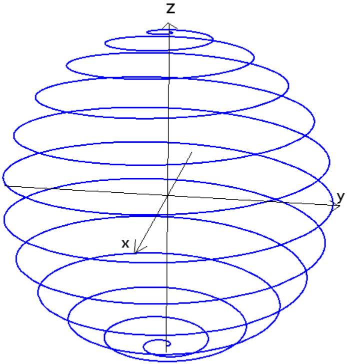
$$H(t) = -\frac{g\mu B_0}{2}\hat{e}_z - \frac{g\mu B_1}{2} cos\left(\frac{g\mu B_0 t}{\hbar}\right)\hat{e}_x$$



Setze: $g\mu B_0 = \hbar\omega$ und $g\mu B_1 = \hbar\Omega$.
Wechsel in das rotierende Bezugssystem mittels $U = e^{i\frac{\omega t}{2}\sigma_z}$ und Anwendung der Rotating Wave Approximation führen zum Hamiltonoperator:

$$H' \approx -\hbar\frac{\Omega}{4}\sigma_x$$

Drehung von $|0\rangle$ in die Äquatorialebene:
B_x für $t = \frac{\pi}{\Omega}$ anschalten.
Drehung von $|0\rangle$ zu $|1\rangle$:
B_x für $t = \frac{2\pi}{\Omega}$ anschalten.



Einige spezielle Rotationen

Das X-Gatter, entspricht dem klassischen NOT-Gatter und ist auf der Blochkugel eine Drehung um 180° um die x-Achse:

$$U_X = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_x} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das $\frac{\pi}{8}$-Gatter, entspricht einer Drehung um 45° um die z-Achse und hat wie alle nachfolgenden Gatter kein klassisches Gegenstück:

$$U_T = e^{-i\frac{\pi}{8}\sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}$$

Das Phasengatter:

$$U_S = {U_T}^2 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Das Hadamard-Gatter, erzeugt Superposition von Zuständen:

$$U_H = e^{i\frac{\pi}{2}(\sigma_x+\sigma_z)/\sqrt{2}} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mehrere Qubits

Der allgemeine Zustand eines Systems mit N Qubits:

$$|\psi\rangle = |00...00\rangle + c_1\,|00...01\rangle + ... + c_{2^N-1}\,|11...11\rangle$$

mit der Normierung

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} |c_i|^2 = 1.$$

Gatter die auf zwei Spin-Qubits i und j wirken lassen sich mittels der Heisenbergwechselwirkung

$$H(t) = J_{i,j}(t)\vec{S}_i\vec{S}_j$$

erstellen.

SWAP-Gatter

Ein Gatter das es auch bei klassischen Computern gibt ist das SWAP-Gatter, dass die Zustände der beiden Qubits vertauscht, also folgende Übergänge hat:

$$U_{SWAP}\,|00\rangle = |00\rangle$$
$$U_{SWAP}\,|01\rangle = |10\rangle$$
$$U_{SWAP}\,|10\rangle = |01\rangle$$
$$U_{SWAP}\,|11\rangle = |11\rangle$$

SWAP kann auf die Spins i und j angewendet werden in dem man die Wechselwirkung zwischen den beiden Spins für die Dauer von $t = \frac{\pi}{J_{i,j}\hbar}$ anschaltet.

$\sqrt{SWAP}$-Gatter

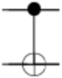
Mit dem SWAP-Gatter lassen sich keine verschränkten Zustände erzeugen, die ein entscheidender Vorteil von Quantencomputern sind. Um diesen Umstand zu beheben kann das $\sqrt{SWAP}$-Gatter verwenden. Dieses erhält man, wenn man die Heisenbergwechselwirkung halb so lange wirken lässt wie für ein SWAP-Gatter. Übergänge $\sqrt{SWAP}$:

$$U_{SWAP}\left|00\right\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|00\right\rangle$$
$$U_{SWAP}\left|01\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle$$
$$U_{SWAP}\left|10\right\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left|10\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|01\right\rangle$$
$$U_{SWAP}\left|11\right\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|11\right\rangle$$

Der Name kommt dadurch zu stande, da $(U_{\sqrt{SWAP}})^2 = U_{SWAP}$ gilt.

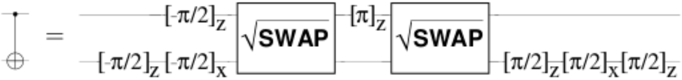
CNOT

Das controlled-Not-Gatter ist ein Gatter, dass je nach Zustand des ersten Qubit das zweiten Qubit invertiert oder nicht.



$$= U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einem Quantencomputer der auf Spins basiert könnte es wie folgt realisiert werden:



N.Schuch & J.Siewert, PHYSICAL REVIEW A **67***, 032301 (2003)*

Mathematische Darstellung:

$$U_{CNOT} = (I \otimes U_P U_X^{1/2} U_P) U_{\sqrt{SWAP}} (U_Z \otimes I) U_{\sqrt{SWAP}} (U_P^{-1} \otimes U_X^{-1/2} U_P)$$

Universelles Set von Gattern

Mit einem universellem Set ist man in der Lage jedes andere Gatter einer bestimmten Art zu konstruieren.

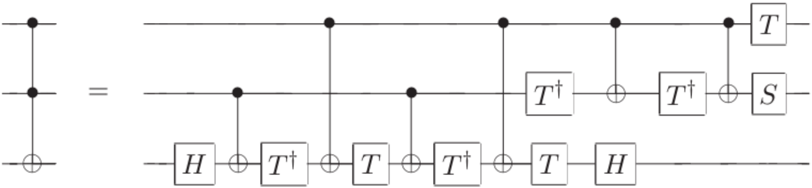
Universelles Set logische Gatter: NAND

Universelles Set Quantengatter: alle Rotationen um 2 Achsen und CNOT

Beliebig genaue Näherung eines beliebigen Quantengatters: Hadamard, $\frac{\pi}{8}$ und CNOT

Beispiel eines 3-Qubitgatters aus 1- und 2-Qubit-Gattern

Als Beispiel für ein Gatter, dass mehr als 2 Qubits umfasst möchte ich das Toffoligatter anführen. Es invertiert den Zustand des letzten Qubits, wenn die beiden anderen Qubits im Zustand $|11\rangle$ sind.Man kann es mit CNOT-, Hadamard-, Phasen- und $\frac{\pi}{8}-$Gattern wie folgt realisieren:



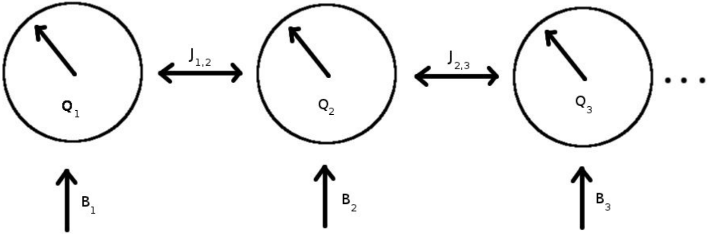
M.A.Nielsen & I.L.Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambrigde University Press, S.182 (2010)

Verallgemeinerung

Idealer Hamiltonoperator für 2-Zustand-System:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{N} \vec{B}_i(t)\vec{\sigma}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{N}\sum_{a,b\in\{x,y,z\}} J_{a,b}^{i,j}(t)\vec{\sigma}_a^i\vec{\sigma}_b^j,$$

Wobei Parameter $\vec{B}_i(t)$ und $J_{a,b}^{i,j}(t)$ kontrollierbar.



Zusammenfassung

- Quantencomputer können bestimmte Berechnungen beschleunigen
- Realisierung von 1- & 2-Qubit-Gatter am Beispiel von Spins im Magnetfeld
- Um alle möglichen Quantenoperationen durchführen zu können, benötigt man lediglich wenige 1-Qubit und 2-Qubit-Gatter