Hauptseminar: Physik des Quantencomputers

Rauschen und Dekohärenz II: Die Mastergleichung

Viktoria Kungel

22.05.2012

Übersicht

- Phänomenologisches Verfahren
  - Klassische Form
  - Quantenmechanische Form

- Mikroskopische Herleitung
  - Qubit an Bad aus harmonischen Oszillatoren

Phänomenologische Herleitung

- Stochastischer Prozess: Zufällige Entwicklung

$$\sum p(a_i, t_i) = 1$$

$$p(a_2, t_2) = \sum_{a_1} P_c(a_2, t_2 | a_1, t_1) p(a_1, t_1)$$

Markov-Prozess

- Kurzes Erinnerungsvermögen → Markov-Näherung

$$P_c(a_i, t_i | a_{n-1}, t_{n-1}; \ldots; a_2, t_2; a_1, t_1) = P_c(a_i, t_i | a_{n-1}, t_{n-1})$$

- Schwache Wechselwirkung

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

- Zusammensetzung:

$$Pc(a_{i+1}, t_{i+1} | a_{i-1}, ti - 1)$$

$$= \sum_{ai} P_c(a_{i+1}, t_{i+1} | a_i, t_i) P_c(a_i, t_i | a_{i-1}, ti - 1)$$

$$\boxed{p(a, t; a_i, t_i) = \int da' p(a, t | a', t') p(a', t'; a_i, t_i)}$$

Klassische Form

$$t - t' = \delta t \qquad N = \int da'' p(a'', t | a', t - \delta t) = 1$$

- Die Entwicklung von t um t':

$$p(a, t | a', t - \delta t) \approx \underbrace{p(a, t' | a', t')}_{\delta(a-a')}$$

$$+ \left(\frac{1}{N} \underbrace{\frac{\partial p(a, t | a', t - \delta t)}{\partial t}}_{W(a|a')} - \frac{1}{N^2} p(a, t' | a', t') \int da'' \underbrace{\frac{\partial p(a'', t | a', t - \delta t)}{\partial t}}_{W(a''|a')} \right) \underbrace{(t - t')}_{\delta t}$$

Klassische Form

$$p(a,t|a',t-\delta t) = \delta(a-a')\left(1 - \delta t \int da'' W(a''|a')\right) + \delta t W(a|a')$$

Eingesetzt in $$p(a,t;a_i,t_i) = \int da' p(a,t|a',t') p(a',t';a_i,t_i)$$

mit $$\lim_{\delta t \to 0} t' = t$$

Klassische Mastergleichung

$$\partial_t p(a,t) = \int da' [W(a|a')p(a',t) - W(a'|a)p(a,t)]$$

Detailliertes Gleichgewicht

- Für $t \to \infty$

$$0 = \sum_a (W_{aa'} p_a^{st} - W_{a'a} p_{a'}^{st})$$

$$\frac{p_a^{st}}{p_{a'}^{st}} = \frac{W_{a'a}}{W_{aa'}}$$

Quantenmechanische Form

- Bekannt: Dichtematrix
- Gesucht:

$$\rho(t) = \sum_{\nu} K_{\nu}(t)\rho(0)K_{\nu}^{\dagger}(t)$$

$$\rho(\delta t) = \rho(0) + \delta t P$$

- Kraus-Operatoren nicht unbedingt unitär

$$\sum_{\nu} K_{\nu}(t)K_{\nu}^{\dagger}(t) = I$$

Krauszerlegung

- Eine passende Zerlegung wäre

$$K_0 = I + \delta t \underbrace{X}_{=iH+A} \qquad K_{\nu\neq 0} = \sqrt{\delta t} L_\nu$$

$$A = -\frac{1}{2\delta t} \sum_{\nu\geq 1} K_\nu K_\nu^\dagger$$

Mastergleichung in Lindbladform

$$\rho(\delta t) = \rho(0) + \delta t[X(t)\rho(0) + \rho(0)X(t)^\dagger + \sum_{\nu\neq 0} L_\nu(t)\rho(0)L_\nu^\dagger(t)]$$

$$\boxed{\partial_t\rho(t) = -i[H,\rho(t)] + \sum_{\nu\neq 0} L_\nu(t)\rho(t)L_\nu^\dagger(t) - \frac{1}{2}L_\nu(t)L_\nu^\dagger(t)\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)L_\nu(t)L_\nu^\dagger(t)}$$

Mikroskopische Herleitung

- System + Bad: $H = H_s + H_b + \underbrace{H_{sb}}_{V_s \otimes V_b}$
- Anfangsbedingungen: $\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_b^{eq}$

$$\rho_b^{eq} = \frac{1}{Z_b} \sum_n e^{-\beta E_n^b} |n\rangle\langle n|$$

Reduzierte Dichtematrix

$$\rho_s(t) = \mathrm{Tr}_b \rho(t)$$

- Im WW-Bild gilt:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_s+H_b)t} \rho(t) e^{-i(H_s+H_b)t}$$

$$\boxed{i\hbar \dot{\tilde{\rho}}_s = \mathrm{Tr}_b[\tilde{H}_{sb}(t), \tilde{\rho}]}$$

$$\tilde{H}_{sb}(t) = e^{iH_s t} V_s e^{-iH_s t} \otimes e^{iH_b t} \delta V_b e^{-iH_b t}$$

Born-Näherung

- System ist viel kleiner als das Bad

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_s(t) \otimes \rho_b^{eq} + \delta\tilde{\rho}(t)$$

$$\boxed{i\hbar\ \dot{\tilde{\rho}}_s = Tr_b[\tilde{H}_{sb}, \delta\tilde{\rho}]}$$

$$\uparrow$$

$$i\hbar\ \dot{\delta\tilde{\rho}} = [\tilde{H}_{sb}, \tilde{\rho}_s \otimes \rho_b^{eq}]$$

Mikroskopische Mastergleichung

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \mathrm{Tr}_b[\tilde{H}_{sb}(t), [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}_s(t') \otimes \rho_b^{eq}]]$$

Korrelationsfunktion:

$$C(t,t') = \langle \delta V_b(t) \delta V_b(t') \rangle_b = \mathrm{Tr}_b(\delta V_b(t) \delta V_b(t') \rho_b^{eq})$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' C(t,t')(\tilde{V}(t)\tilde{V}(t')\tilde{\rho}_s(t') - \tilde{V}(t)\tilde{\rho}_s(t')\tilde{V}(t)) \\ - C(t',t)(\tilde{V}(t)\tilde{\rho}_s(t')\tilde{V}(t') - \tilde{\rho}_s(t')\tilde{V}(t')\tilde{V}(t))\end{aligned}$$

Markov-Näherung

- Korrelation leistet nur kurz Beitrag $\tau = t' - t$
- Dichtematrix ändert sich kaum $\tilde{\rho}(t') \approx \tilde{\rho}(t)$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' C(\tau)(\tilde{V}(t)\tilde{V}(t+\tau)\tilde{\rho}_s(t) - \tilde{V}(t+\tau)\tilde{\rho}_s(t)\tilde{V}(t)$$
$$- C(-\tau)(\tilde{V}(t)\tilde{\rho}_s(t)\tilde{V}(t+\tau) - \tilde{\rho}_s(t)\tilde{V}(t+\tau)\tilde{V}(t))$$

Literatur

- Marquardt et al., Introduction to dissipation and decoherence in quantum systems, 2008
- Shumeiko, Statistical Physics II, 2009 (Kapitel über Quantum Liouville Equation)
- Altland et al., Condensed Matter Field Theorie, Cambridge University Press, 2010