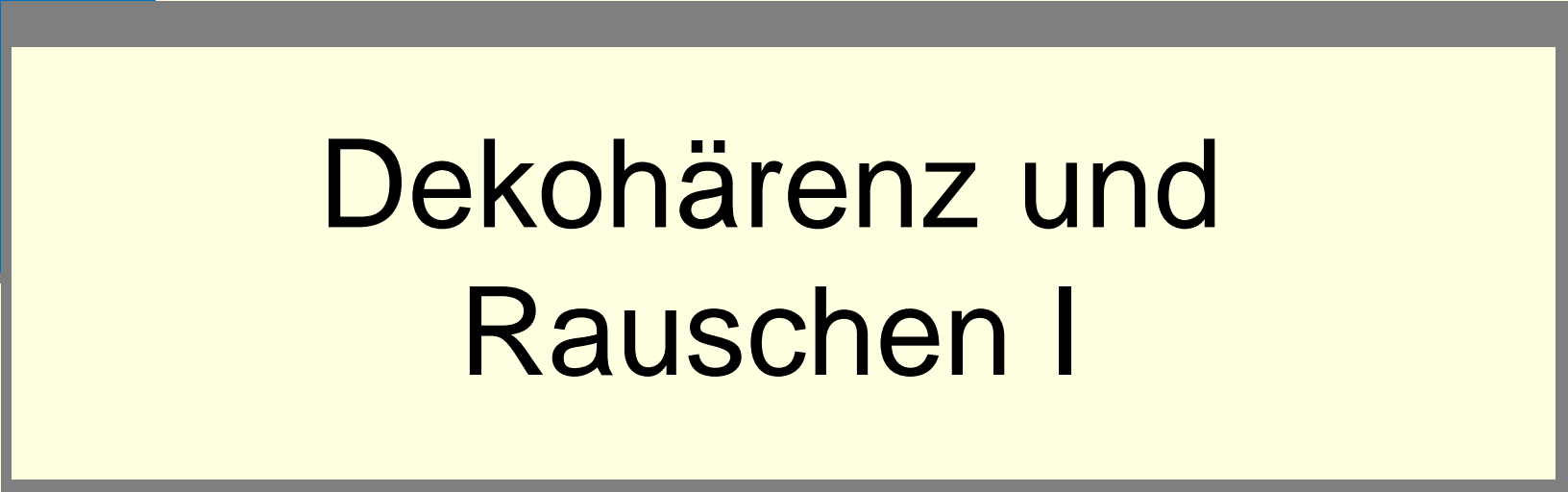


Hauptseminar Physik des Quantencomputers



Dekohärenz und Rauschen I

Gliederung

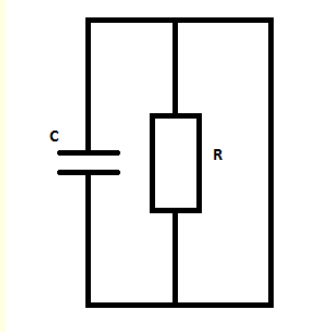
- Klassisches Rauschen
 - Beispiel: Johnson-Nyquist-Rauschen
 - Gauß'sche Verteilungsfunktion
- Verschiedene Arten von Rauschen
- Dichtematrix
- Qubit gekoppelt an Feld mit Fluktuation
 - Longitudinale Fluktuation
 - Transversale Fluktuation
 - Dekohärenz
- Fazit

Klassisches Rauschen

- Störgröße
- Viele zufällige Einzelvorgänge überlagern sich

Klassisches Johnson-Nyquist-Rauschen

- Schaltkreis:



➔ $\frac{Q}{C} + R\dot{Q} = 0$

- Jedoch: statistische Spannung zu messen
→ Rauschen
- Folgt aus thermischer Bewegung der Ladungsträger an Widerständen (Brown'sche Bewegung)

J. B. Johnson, Thermal agitation of electricity in conductors, Phys. Rev. 32, 97-110 (1928)

Klassisches Johnson-Nyquist-Rauschen

- Für dieses Rauschen gilt:

$$\langle U_{jn}(t) \rangle = 0$$

Autokorrelationsfunktion:

$$\langle U_{jn}(t) \cdot U_{jn}(t') \rangle = 2k_B TR \delta(t - t')$$

- Fourier-Transformierte:

$$\langle U_{jn}(\omega) \cdot U_{jn}(\omega') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega t - i\omega' t'} \langle U_{jn}(t) \cdot U_{jn}(t') \rangle$$

H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors, Phys. Rev. 32, 110-13 (1928)

Klassisches Johnson-Nyquist-Rauschen

- Fourier-Transformierte:

$$\left\langle U_{jn}(\omega) \cdot U_{jn}(\omega') \right\rangle = \underbrace{4k_B TR}_{S_U(\omega)} \cdot \pi \delta(\omega + \omega')$$

spektrale Dichte:

$$\rightarrow S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \left\langle U_{jn}(t) \cdot U_{jn}(0) \right\rangle$$

H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors, Phys. Rev. 32, 110-13 (1928)

Klassisches Johnson-Nyquist-Rauschen

- Externer Strom:

$$C\dot{U}(t) + \frac{U(t)}{R} = I(t) + I_{jn}(t)$$

Impedanz:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} - i\omega C}$$

- Rauschen:

$$\langle I_{jn}(t) \cdot I_{jn}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t')$$

Klassisches Johnson-Nyquist-Rauschen

- spektrale Dichte:

$$\begin{aligned}\langle U_{jn}(\omega) \cdot U_{jn}(\omega') \rangle &= |Z(\omega)|^2 \langle I_{jn}(\omega) \cdot I_{jn}(\omega') \rangle \\ &= 4\pi k_B T \operatorname{Re}(Z(\omega)) \cdot \delta(\omega + \omega')\end{aligned}$$

➔ $S_U(\omega) = 4k_B T \cdot \operatorname{Re}(Z(\omega))$

- Fluktuation-Dissipations-Theorem:

Reaktion des Systems unabhängig davon, ob äußere Störung oder Fluktuation

Gauß'sche Verteilungsfunktion

Rauschgröße:

$$\delta X(t)$$

Eigenschaften:

$$\langle \delta X(t) \rangle = 0$$

$$\langle \delta X(t) \cdot \delta X(t') \rangle = A(t, t')$$

$$\langle \delta X(t) \cdot \delta X(t') \cdot \delta X(t'') \rangle = 0$$

$$\rightarrow \left\langle e^{-i \int dt X(t)} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2} \int dt dt' \langle X(t) X(t') \rangle}$$

Verschiedene Arten von Rauschen

Weißes Rauschen:

- Frequenzunabhängig
- Bsp.: thermisches Rauschen (Johnson-Nyquist)

1/f – Rauschen:

- Rauschleistung nimmt mit zunehmender Frequenz ab

$$S(\omega) \propto \frac{1}{\omega^\alpha}$$

mit $\alpha=0,5\dots 2$

Schrotrauschen:

- Ladungsträger die Potentialbarriere überwinden müssen
- Bsp.: Elektronentunneln

$$S_I(\omega) = 2 \frac{eV}{R} \coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right)$$

Dichtematrix

$$\hat{\rho} = \sum_{|\psi\rangle} W_{|\psi\rangle} |\psi\rangle\langle\psi|$$

- Eigenschaften:

$$\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$$

$$\rho = \rho^\dagger$$

- Zeitentwicklung:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

für $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(0) U^\dagger(t, t_0) \quad \text{mit} \quad U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$$

F. Marquart, A. Püttmann, Introduction to dissipation and decoherence in quantum systems, 2008

Dichtematrix

Reine Zustände

$$W_{|\psi\rangle} = 1$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\rho^2 = \rho$$

$$\text{tr}(\rho^2) = 1$$

Gemischte Zustände

$$\rho^2 \neq \rho$$

$$\text{tr}(\rho^2) < 1$$

F.Marquart, A.Püttmann, Introduction to dissipation and decoherence in quantum systems, 2008

Qubit gekoppelt an Feld mit Fluktuation

- Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen in statischen B-Feld $(0, 0, B_z)$ mit zufälliger Fluktuation $\langle \delta B(t) \rangle = 0$

- Hamiltonian:
$$H = \underbrace{-\frac{B_z}{2} \sigma_z}_{H_0} - \underbrace{\frac{\delta \vec{B}(t)}{2} \vec{\sigma}}_{H_1}$$

- Dichtematrix des Systems für $t=0$

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) & \rho_{01}(0) \\ \rho_{10}(0) & \rho_{11}(0) \end{pmatrix}$$

- Zeitentwicklung:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) & \rho_{01}(0) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} B_z t} \\ \rho_{10}(0) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} B_z t} & \rho_{11}(0) \end{pmatrix}$$

G.Johansson, T.Bauch, Decoherence and the Bloch equations, 2011

Qubit gekoppelt an Feld mit Fluktuation

- Transformation ins Wechselwirkungsbild:

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t) H_1(t) U_0(t)$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta B_z(t) & (\delta B_x(t) - i\delta B_y(t)) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} B_z t} \\ (\delta B_x(t) + i\delta B_y(t)) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} B_z t} & \delta B_z(t) \end{pmatrix}$$

- Liouville-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_I(t) = [H_I(t), \rho_I(t)]$$

$$= \left[H_I(t), \rho_I(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [H_I(t'), \rho_I(t')] \right]$$

G.Johansson, T.Bauch, Decoherence and the Bloch equations, 2011

Longitudinale Fluktuation

- Fluktuation:

$$\delta B_x(t) = \delta B_y(t) = 0$$

$$\delta B_z(t) \neq 0$$

- Dichtematrix:

$$\rho_I(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}^I(0) & \rho_{01}^I(0) \cdot e^{-\Gamma_2^* t} \\ \rho_{10}^I(0) \cdot e^{-\Gamma_2^* t} & \rho_{11}^I(0) \end{pmatrix}$$

mit Dephasierungsrate:

$$\Gamma_2^* = \frac{1}{2\hbar^2} S_z(0)$$

$$\rho_I(t \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} \rho_{00}^I(0) & 0 \\ 0 & \rho_{11}^I(0) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Dephasierung}$$

Transversale Fluktuation

- Fluktuation:

$$\delta B_y(t) = \delta B_z(t) = 0$$

$$\delta B_x(t) \neq 0$$

- Hamiltonian im Wechselwirkungsbild:

$$H_I = -\frac{1}{2} \delta B_x(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{i}{2\hbar} B_z t} \\ e^{\frac{i}{2\hbar} B_z t} & 0 \end{pmatrix}$$

- Liouville Gleichung:

$$\dot{\rho}_{00}^I(t) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t dt' \langle \delta B_x(t') \delta B_x(t) \rangle (\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)) \left(e^{\frac{i}{\hbar} B_z (t-t')} + e^{\frac{i}{\hbar} B_z (t-t')} \right)$$

$$\dot{\rho}_{10}^I(t) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t dt' \langle \delta B_x(t') \delta B_x(t) \rangle \left(\rho_{10}(t) e^{\frac{i}{\hbar} B_z (t-t')} - \rho_{01}(t) e^{\frac{i}{\hbar} B_z (t+t')} \right)$$

Transversale Fluktuation

■ Relaxationsrate:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{1}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \delta B_x(t) \cdot \delta B_x(t-\tau) \rangle e^{\frac{iB_z\tau}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} S\left(\omega = \frac{B_z}{\hbar}\right)\end{aligned}$$

■ Elemente:

$$\dot{\rho}_{00}^I(t) - \dot{\rho}_{11}^I(t) = -(\rho_{00}^I(t) - \rho_{11}^I(t)) \cdot \Gamma_1(t)$$

$$\dot{\rho}_{10}^I(t) = -\frac{1}{2} \rho_{10}^I(t) \cdot \Gamma_1(t)$$

G.Johansson, T.Bauch, Decoherence and the Bloch equations, 2011

Transversale Fluktuation

■ Dichtematrix:

$$\rho_I(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \rho_{00}^I(0) \cdot e^{-\Gamma_1 t} & \rho_{01}^I(0) \cdot e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} \\ \rho_{10}^I(0) \cdot e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} & \frac{1}{2} + \rho_{11}^I(0) \cdot e^{-\Gamma_1 t} \end{pmatrix}$$

→ Relaxation und Dekohärenz

G.Johansson, T.Bauch, Decoherence and the Bloch equations, 2011

Dekohärenz

- Relaxationsrate: $\Gamma_1 = \frac{1}{T_1}$
- Dephasierungsrate: $\Gamma_2^* = \frac{1}{T_2^*}$
- Dekohärenzrate: $\Gamma_2 = \frac{1}{T_2}$

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^* + \frac{1}{2}\Gamma_1$$

G.Johansson, T.Bauch, Decoherence and the Bloch equations, 2011

Fazit

- Qubit an Umwelt gekoppelt
→ Dekohärenz
- Dekohärenzzeiten bisher sehr kurz
→ Zustand des Qubit nur kurzzeitig stabil