Nachklausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2011/12

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

[Hinweis: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebene A4-Seite (beidseitig beschrieben) zugelassen. Die Gesamtzahl der Punkte ist 30, aber 25 Punkte entsprechen 100% der Lösung.]

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Zweizustandssystem

Ein Hamilton-Operator H habe zwei normierte Eigenzustände, $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$, jeweils mit den Energien E_1 and E_2.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Zustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ orthogonal sind, wenn $E_1 \neq E_2$.

b) (1 Punkt) Eine Observable sei durch den hermiteschen Operator A gegeben, mit $A|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ und $A|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A in der Basis von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$.

c) (2 Punkte) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)$ präpariert. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dass das System zum Initialzustand zurückkehrt, durch $P = \cos^2((E_1 - E_2)t/2\hbar)$ gegeben ist .

Aufgabe 2 **(2 Punkte)**

Ehrenfest'sches Theorem

Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen der Operatoren $x(t)$ und $p(t)$ im Heisenberg-Bild auf.

(b) (1 Punkt) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für den Erwartungswert $\bar{x}(t) = \langle x(t)\rangle$. Nehmen Sie an, dass das Potential die Form $V(x) = V_0 x^n$ hat. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist die Bewegungsgleichung für $\bar{x}(t)$ äquivalent zu der klassischen Bewegungsgleichung $m\ddot{\bar{x}} = -\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$?

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Entartete zeitunabhängige Störungstheorie

Der Hamilton-Operator eines dreizustandssystems sei definiert durch

$$H = aS_z^2 + b(S_x^2 - S_y^2) \tag{1}$$

mit

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) (2 Punkte) Behandeln Sie den Term $\propto b \ll a$ als eine Störung. Berechnen Sie die Eigenenergien in erster Ordnung Störungstheorie.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die exakten Eigenenergien und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a).

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Zeitabhängige Störungstheorie

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator und ein Zweizustandssystem seien durch $H_0 = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \epsilon\sigma_z/2$ charakterisiert. Das Zweizustandssystem und der harmonische Oszillator seien gekoppelt durch $H_1 = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)e^{\eta t}$. Der gesamte Hamilton-Operator ist gegeben durch $H = H_0 + H_1$.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie in H_1 die Übergangsrate vom Zustand $|n\rangle|\uparrow\rangle$ zum Zustand $|n+1\rangle|\downarrow\rangle$ des ungestörten Hamilton-Operators H_0.
Wählen Sie als untere Grenze ihres Integrals die Zeit $t_0 \to -\infty$.

(b) (1 Punkt) Bilden Sie den Limes $\eta \to 0$. Wie sieht die in der vorherigen Teilaufgabe berechnete Übergangsrate aus?

Bitte wenden...

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Reduzierte Dichtematrix von zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

Wir betrachten zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Singulett-Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$.

a) (2 Punkte) Finden Sie die Dichtematrix die diesem Zustand entspricht und zeigen Sie explizit, dass diese Dichtematrix einem reinen Zustand entspricht.

b) (2 Punkte) Spuren Sie die Dichtematrix über die Freiheitsgrade eines der beiden Spins um die reduzierte Dichtematrix zu bekommen. Ist die Dichtematrix danach die eines reinen oder eines gemischten Zustandes?

Aufgabe 6 **(6 Punkte)**

Kohärente Zustände

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator der durch die Auf- und Absteigeoperatoren $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{i}{m\omega}p)$ und $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - \frac{i}{m\omega}p)$ beschrieben wird.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus den Vertauschungsrelationen $[a, a^\dagger] = 1$ die Relation $e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = a + \alpha$ folgt. Zeigen Sie außerdem, dass für den Zustand $|\alpha\rangle = N e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ die Relation $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ gilt.

b) (1 Punkt) Finden Sie den Normierungsfaktor N.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ und $\langle p^2\rangle$ bezüglich des Zustandes $|\alpha\rangle$, und zeigen Sie, dass

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{3}$$

d) (1 Punkt) Die Wellenfunktion in Ortskoordinaten ist gegben durch $\psi(x) = \langle x|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Gleichung

$$(x + \frac{\hbar}{m\omega}\partial_x)\psi(x) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha\psi(x) \tag{4}$$

erfüllt. Zeigen Sie dann, dass diese Gleichung durch

$$\psi(x) = N e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}x} \tag{5}$$

gelöst wird.

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Dirac Gleichung in einem Magnetfeld

Ein Elektron bewege sich in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Dieses Magnetfeld kann durch das Vektorpotential $\boldsymbol{A} = (-By, 0, 0)$ beschrieben werden.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Spinor Ψ in der stationären Dirac-Gleichung

$$(E - \beta mc^2)\Psi = c\alpha^i(-i\hbar\partial_i - \frac{q}{c}A_i)\Psi \tag{6}$$

in der Form $\Psi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ und leiten Sie daraus eine Eigenwertgleichung für den zweikomponentigen Spinor ϕ_1 her, indem Sie den Spinor ϕ_2 eliminieren.

b) (2 Punkte) Bringen Sie diese Eigenwertgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(y)e^{i(k_x x + k_z z)} \tag{7}$$

sowie durch die Variablensubstitution

$$\xi = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\left(y - \frac{\hbar c k_x}{eB}\right) \tag{8}$$

in die Form

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + a_\sigma\right)\chi_1 = 0 \tag{9}$$

Bestimmen Sie a_σ für die Spinkomponenten $\sigma = \pm 1$.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E_n aus der Bedingung, dass der Koeffizient a_σ die ganzzahligen Werte $2n + 1$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen muss.