Quantenmechanik II: Lorentz-Transformationen und Kovarianz der Dirac-Gleichung

January 26, 2012

Tensornotation und Minkowski-Raumzeit

Kontr.v. Vierervektor: $x^\mu = (x^0, x^1, x^3, x^4) = (ct, \boldsymbol{x})$.

Kov. Vierervektor: $x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\boldsymbol{x})$

Kontr.v. Tensor: $T^{\mu\nu}$

Kov. Tensor: $T_{\mu\nu}$

Gemischter Tensor: $T^\mu_{\ \nu}$, $T_\mu^{\ \nu}$

Kontraktion.: $y^\mu = T^\mu_{\ \nu} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} T^\mu_{\ \nu} x^\nu$.

Metrik: $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$, $T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_\rho^{\ \nu}$, etc.

Minkowski-Inneres-Produkt: $y^\mu x_\mu = y^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$

1 Lorentz-Transformationen

In diesem Kurs geben wir keine lange Einführung in die spezielle Relativitätstheorie. Stattdessen postulieren wir die Minkowski-Raumzeit und argumentieren hinterher kurz dafür dass der mathematische Formalismus zutreffend ist. Der Minkowski-Raum ist ein vierdimensionaler reeller Vektorraum, auf dem anstelle des üblichen Skalarprodukts eine Bilinearform gegeben ist, die nicht notwendigerweise positiv definit ist. Die Komponenten eines Vektors im Minkowski-Raum sind gegeben durch x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ die zusammen einen Vierervektor bilden. Das Minkowski-Innere-Produkt wird durch die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Die quadratische Form $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ ist hier also nicht unbedingt positiv[1], und sollte unter Wechsel des Koordinatensystems invariant bleiben, d.h. $x'^{\mu} g_{\mu\nu} x'^{\mu} = x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu}$. Transformationen die diese Eigenschaften besitzen nennen wir **Lorentz-Transformationen** (Diese Benennung ist hier eher allgemein und beinhaltet mehr als nur die Boosts zwischen Inertialsystemen die hier *Lorentz-Boosts* oder *Lorentz-Transformationen im engeren Sinn* genannt werden).

Die quadratische Form $x^{\mu} x_{\mu} = x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu}$ transformiert unter einer Lorentz-Transformation $\Lambda : x^{\mu} \mapsto x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ wie

$$x^{\mu} x_{\mu} \mapsto x'^{\mu} x'_{\mu} = (\Lambda^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}) g_{\mu\nu} (\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma}).$$

Indem wir die quadratische Form als $x^T g x$ schreiben so haben wir die etwas durchsichtigere Form :

$$x^T g x \mapsto x'^T g x' = x^T \Lambda^T g \Lambda x. \tag{1}$$

Also ist die quadratische Form invariant wenn $\Lambda^T g \Lambda = g$. Dies ist die fundamentale Bedingung der **(homogenen) Lorentz-Gruppe** $\mathcal{L}$.

Gruppe

Eine Gruppe G ist eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $\circ$ so dass $g_1 \circ g_2 = g_3 \in G$. Dazu müssen noch die folgenden Eigenschaften existieren:

- Associativität $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$.
- Neutrales Element $e \in G : e \circ g = g \circ e = g$.
- Inverses Element $g^{-1} \in G : g^{-1} g = g g^{-1} = e$.

Für die Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ ist die Menge alle Reellen 4×4 Matrizen mit der Eigenschaft $\Lambda^T g \Lambda = g$ und die Verknüpfung ist das gewöhnliche Matrixprodukt. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix und das inverse Element ist die Matrixinverse. Wenn $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$ dann ist auch $\Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}$ denn $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g$.

Um die Lorentz-Gruppe zu charakterisieren können wir zwei besonders wichtige Eigenschaften feststellen:

1. Da $\det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det \Lambda^T \det g \det \Lambda = \det g \det \Lambda^2$, haben wir, dass $\det \Lambda = \pm 1$.
2. Nehmen wir von der Gleichung $\Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}$ das Element mit $\rho = \sigma = 0$ so haben wir:

$$\Lambda^{\mu}{}_{0} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^{i}{}_{0})^2 = 1. \tag{2}$$

[1] Vierervektoren für die $x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu} > 0$ nennt man Zeitähnlich, für $x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu} < 0$ Raumähnlich und für $x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu} = 0$ Lichtähnlich.

Da $\sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 0$ haben wir dass $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

Wir können die Menge dann in den folgenden Untermengen zerlegen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$ wobei

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow: &\qquad \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1,\\
\mathcal{L}_+^\downarrow: &\qquad \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1,\\
\mathcal{L}_-^\uparrow: &\qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1,\\
\mathcal{L}_-^\downarrow: &\qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Diese Untermengen sind nicht ununterbrochen mit einander verbunden, d.h. es gibt kein Element in einer Untermenge, das beliebig nah an ein Element in einer anderen Untermenge ist. Nur die Untermenge $\mathcal{L}_+^\uparrow$ enthält die Einheitsmatrix und deshalb ist auch nur $\mathcal{L}_+^\uparrow$ eine Untergruppe.

Wir können drei wichtige Elemente identifizieren.

- Raum-Spiegelung

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

  mit $\det P = -1$ und $P^0{}_0 = 1$ bedeutet dies dass $P \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

- Zeit-Spiegelung

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

  mit $\det T = -1$ und $T^0{}_0 = -1$ bedeutet dies dass $T \in \mathcal{L}_-^\downarrow$.

- Raum- und Zeit-Spiegelung

$$PT = TP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

  mit $\det(PT) = 1$ und $(PT)^0{}_0 = -1$ bedeutet dies dass $PT \in \mathcal{L}_+^\downarrow$

Zusammen mit der Einheitsmatrix bilden diese drei Transformationen eine diskrete Untergruppe $\{1, P, T, PT\}$, und es sollte klar sein dass diese Elemente alle zu verschiedenen Untermengen gehören $1 \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, $P \in \mathcal{L}_-^\uparrow$, $T \in \mathcal{L}_-^\downarrow$ und $PT \in \mathcal{L}_+^\downarrow$. man kann zeigen, dass die zwei Untergruppen $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und $\{1, T, P, TP\}$ ausreichen um die volle Lorentz-Gruppe zu erzeugen. Genauer gesagt sind die anderen Untermengen gegeben von $\mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow$ und $\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$. Kurz geschreiben haben wir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \times \{1, P, T, PT\}. \tag{7}$$

2 Physikalische Konsequenzen

Drehungen: Eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe ist die Drehgruppe. Betrachten wir eine Transformation $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu}$ die den Vierervektor folgendermassen verändert: $x'^0 = x^0$ und $x'^i = R^i{}_j x^j$. Dass das Minkowski-Innere-Produkt erhalten bleibt bedeutet:

$$x^{\mu} x_{\mu} = x'^{\mu} x'_{\mu} \Rightarrow x^i x_i = x'^i x'_i \Rightarrow |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}'|. \tag{8}$$

Für die Drehmatrix bedeutet dies dass die Block-Matrix für den Raumteil eine orthogonale Matrix sein muss, und wenn wir $\det R = +1$ verlangen (Raumspiegelungen weglassen) dann müssen sie Elemente der SO(3)-Gruppe sein. Drehungen kennen wir aus der nichtrelavistischen Physik. Als Beispiel können wir zwei Beobachter an verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche nehmen. Beide würden ihr Koordinatsystem so wählen dass die z-Achse nach 'oben' zeigt. Die Übersetsung zwischen diesen Koordinatsystemen ist durch die Drehung $\Lambda = R$ beschrieben.

Boosts: Betrachten wir ein Teilchen das sich mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ relativ zu einem Inertialsystem I bewegt. Der Vierervektor ist dann $x^{\mu} = (ct, \boldsymbol{v}t)$. Das Minkowski-Innere-Produkt gibt dann $x^{\mu} x_{\mu} = (c^2 - v^2)t^2$. Wir sollten nun bemerken dass für ein Teilchen das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, das Minkowski-Innere-Produkt gleich null ist $x^{\mu} x_{\mu} = 0$.

Nach einer Zeit dt, gemessen mit einer Uhr in Bezugssystem I, ist der Vierervektor $x^{\mu} + dx^{\mu}$ wobei $dx^{\mu} = (c, \boldsymbol{v})dt$. Betrachten wir dann das Teilchen von einem Bezugssystem I' in dem es in einer Ruhelage ist, d.h. $\boldsymbol{v}' = 0$. In dem Bezugssystem I' bewegt sich das Teilchen nicht und wir haben $x'^{\mu} + dx'^{\mu}$ wobei $dx'^{\mu} = (c, 0)d\tau$. Verlangen wir dass die quadratische Form in beiden Bezugssystemen gleich ist

$$c^2 d\tau^2 = dx'^{\mu} dx'_{\mu} = dx^{\mu} dx_{\mu} = (c^2 - v^2)dt^2 \tag{9}$$

so sehen wir dass die Zeit die im Bezugssystem I' gemessen wurde, anders ist als die die im Bezugssystem I gemessen wurde. Genauer gesagt sind die Zeiten relatiert durch $d\tau = \sqrt{1-(v/c)^2}dt$.

Die beiden Bezugssysteme sind durch eine Lorentz-Transformation verbunden $dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx'^{\nu}$. Nehmen wir an, dass bei dieser Transformation keine Drehung vorkommt so haben wir (da $dx'^i = 0$)

$$\begin{aligned} dx^i &= \Lambda^i{}_0 c d\tau \\ c dt &= \Lambda^0{}_0 c d\tau \\ &. \end{aligned} \tag{10}$$

Teilen wir beide Gleichungen durch dt so bekommen wir von der unteren Gleichung $\Lambda^0{}_0 = dt/d\tau = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} = \gamma$, und von der oberen $\Lambda^i{}_0 = (v^i/c)/\sqrt{1-(v/c)^2} = \gamma(v^i/c)$.

Das besondere an den Lorentz-Transformationen ist, dass sie auch die Zeit transformieren. Das bedeutet, dass die Zeit in dieser Konstruktion nicht absolut ist. Mit anderen Worten, Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen erleben Zeit verschieden, und ein Ereignis kann für die verschiedenen Beobachter an verschiedenen Zeiten passieren. Zusammen mit den Raum-Koordinaten[2] können wir aber eine 'Übersetzung' finden durch die alle Beobachter mit einander Übereinstimmen. Diese 'Übersetsung' ist die Lorentz-Transformation.

Das Zeitelement $d\tau$ in dem Bezugssystem für dass das Teilchen in Ruhelage ist, nennen wir **Eigenzeit** und diese kann als Referenz-Zeit benutzt werden (In Schwabl wird $ds = cd\tau$ benutzt). Der Vierervektor $x'^{\mu}(\tau) = (c\tau, \mathbf{0})$ wird oft die **Weltlinie** genannt, und wir können die Vierergeschwindigkeit

[2] Aus diesem Grund wird ein Punkt im Minkowski-Raum, zu dem der Vierervektor x^{μ} zeigt, oft ein *Ereignis* genannt.

in diesem Bezugssystem definieren

$$u'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} = (c, \mathbf{0}).$$

Und ebenso den Viererimpuls

$$p'^{\mu}(\tau) = mu'^{\mu}(\tau) = m\frac{dx'^{\mu}}{d\tau} = (mc, \mathbf{0}) \tag{11}$$

Die Vierergeschwindigkeit und der Viererimpuls transformieren unter Lorentz-Transformationen genau wie Vierervektoren und wir haben $u^{\mu}(\tau) = \gamma(c, \boldsymbol{v})$ und

$$p^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p'^{\nu} = \gamma(mc, m\boldsymbol{v}) = (E/c, \boldsymbol{p}).$$

Die quadratische Form

$$(mc)^2 = p'^{\mu} p'_{\mu} = p^{\mu} p_{\mu} = (E/c)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 \tag{12}$$

ist invariant und führt zu der Erhaltung der relativistischen Energierelation $E^2 = |c\boldsymbol{p}|^2 + (mc^2)^2$.

3 Die eingeschränkte Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$

Die Untergruppe $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ mit $\det \Lambda = +1$ (eigentlich) und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (orthochron) nennt man **eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** oder einfach **eingeschränkte Lorentz-Gruppe**. Sie ist eine kontinuierliche Gruppe - eine so genannte Lie-Gruppe. Kontinuierliche Gruppen werden am einfachsten durch infinitesimalen Transformationen analysiert. Die endlichen Transformationen werden dann durch mehrfaches anwenden der infinitesimalen Transformationen erhalten - Potenzierung.

Schreiben wir dann für die Lorentz-Transformationen

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{13}$$

Einsetzen in der Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda$ gibt uns

$$g_{\rho\sigma} = (\delta^{\mu}{}_{\rho} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\rho}) g_{\mu\nu} (\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\sigma}) = g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}\Delta\omega^{\mu}{}_{\rho} + g_{\rho\nu}\Delta\omega^{\nu}{}_{\sigma} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2) \tag{14}$$

Also müssen wir haben, dass

$$\Delta\omega_{\sigma\rho} = -\Delta\omega_{\rho\sigma} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \Delta\omega^0{}_i = +\Delta\omega^i{}_0 \\ \Delta\omega^i{}_j = -\Delta\omega^j{}_i. \end{array} \tag{15}$$

Mit anderen Worten, die infinitesimale 4×4 Matrix $\Delta\omega_{\mu\nu}$ muss anti-symmetrisch sein. Das gibt uns 6 freie Variablen. Die Bedingungen $\det \Lambda = +1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ sind bereits durch die Annahme das die Transformation eine infinitesimale Abweichung der Einheitsmatrix ist garantiert. Benutzen wir die notation $\Delta\omega^0{}_i = -\Delta\eta_i$ und $\Delta\omega^i{}_j = \epsilon^i{}_j{}^k \Delta\theta_k = \epsilon_{ijk}\Delta\theta_k$, kann die Matrix $\Delta\omega$ mit Elementen $\Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$ dann auf die folgende Form gebracht werden

$$\Delta\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\eta^1 & -\Delta\eta^2 & -\Delta\eta^3 \\ -\Delta\eta^1 & 0 & \Delta\theta^3 & -\Delta\theta^2 \\ -\Delta\eta^2 & -\Delta\theta^3 & 0 & \Delta\theta^1 \\ -\Delta\eta^3 & \Delta\theta^2 & -\Delta\theta^1 & 0 \end{pmatrix} = i\Delta\theta_i \mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i \mathcal{K}^i \tag{16}$$

Die Matrizen $\mathcal{I}^i$ und $\mathcal{K}^i$ können direkt von der Gleichung abgelesen werden, aber werden auch später nochmal explizit dargestellt nachdem die Bedeutung dieser Matrizen festgestellt ist.

Beispiel I: Drehungen. Eine infinitesimale Drehung um die x^3-Achse ($\Delta\theta_3 = \theta/N$):

$$\Lambda = R_3\left(\frac{\theta}{N}\right): \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\theta}{N} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta}{N} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \Delta\omega = i\frac{\theta}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3 \tag{17}$$

Für $\theta/N \ll 1$ haben wir $(1 + \frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3) \approx e^{\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3}$ und wir haben die endliche Drehung durch den Winkel θ von

$$\begin{aligned} R_3(\theta) &= \lim_{N\to\infty} R_3^N\left(\frac{\theta}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3\right)^N = \lim_{N\to\infty}(e^{i\frac{\theta}{N}\mathcal{I}^3})^N \\ &= e^{i\theta\mathcal{I}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Wir können $\mathcal{I}^3$ als die Erzeugende der Drehungen um der x^3-Achse identifizieren.

Drehgruppe

Drehungen um die drei Achsen x^1, x^2, x^3 werden beschrieben durch

$$R_i(\theta) = e^{i\theta\mathcal{I}^i} \tag{19}$$

mit

$$\mathcal{I}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Die Erzeugenden $\mathcal{I}^i$ erfüllen die $\mathfrak{su}(2)$-Algebra

$$[\mathcal{I}^i, \mathcal{I}^j] = i\epsilon^{ij}{}_k\mathcal{I}^k = i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k \tag{21}$$

Beispiel II: Lorentz-Boosts Ein infinitesimaler Boost entlang der x^1-Achse:

$$\Lambda = L_1\left(\frac{\eta}{N}\right): \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\eta}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\eta}{N} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1 \tag{22}$$

Für $\eta/N \ll 1$ haben wir $(1 - i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1) \approx e^{-i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1}$ und wir haben den endlichen Boost

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= \lim_{N\to\infty} L_1^N\left(\frac{\eta}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} - i\frac{\eta}{N}\mathcal{K}^1\right)^N = \lim_{N\to\infty}(e^{-i\frac{\theta}{N}\mathcal{K}^1})^N \\ &= e^{-i\eta\mathcal{K}^1} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

Boosts

Boosts entlang der drei Achsen x^1, x^2, x^3 werden beschrieben durch

$$L_i(\eta) = e^{-i\eta\mathcal{K}^i} \tag{24}$$

mit

$$\mathcal{K}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Die Erzeugenden $\mathcal{K}^i$ bilden keine geschlossene Algebra und die Lorentz-Boosts bilden auch keine Untergruppe der Lorentz-Gruppe. Stattdessen haben wir

$$[\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] = -i\epsilon^{ij}{}_k\mathcal{I}^k = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k \tag{26}$$

Lorentz-Algebra

Eine allgemeine infinitesimale Lorentz-Transformation in der eingeschränkten Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \tag{27}$$

können wir durch die Erzeugenden der Drehungen, und der Boosts ausdrücken

$$\Delta\omega = i\Delta\theta_i\mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i\mathcal{K}^i \tag{28}$$

Die Erzeugenden bilden zusammen eine Algebra mit

$$[\mathcal{I}^i, \mathcal{I}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k, \quad [\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{I}^k, \quad [\mathcal{I}^i, \mathcal{K}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}^k \tag{29}$$

Die endlichen Lorentz-Transformationen bekommt man durch potenzieren der infinitesimalen Transformationen.

$$R_i(\theta) = e^{i\theta\mathcal{I}^i}, \qquad L_i(\eta) = e^{-i\eta\mathcal{K}^i}. \tag{30}$$

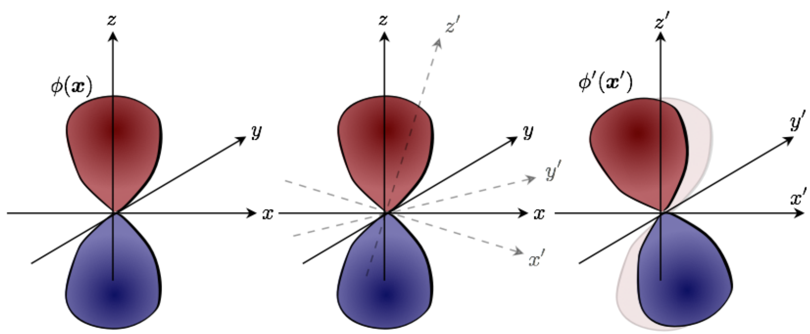
4 Passive- und Aktive Transformationen

Jetzt wo wir die Transformationen der Vierervektoren untersucht haben, wollen wir verstehen wie der Dirac-Spinor, als Funktion von den Vierervektoren unter diesen Transformationen verändert werden. Bevor wir über den Dirac-Spinor sprechen, sollten wir aber verstehen wie sich Wellenfunktionen und Spinoren in der nicht-relativistischen Quanten-Mechanik verändern. Die Hoffnung ist, dass die Analogie zu dem nicht-relativistischen Fall den folgenden Abschnitt weniger Abstrakt macht.

Aufwärmung: Drehungen für nicht-relativistische QM.

Nehmen wir an, wir haben eine skalare Wellenfunktion $\phi(x)$ die in dem gewählten Koordinatensystem K die Form einer p_z-Orbitale nimmt. In einem anderen Koordinatensystem K' nimmt die Wellenfunktion die Form $\phi'(x')$. Hier ist es für die Diskussion in diesem (und dem folgenden) Abschnitt wichtig zu notieren, dass nicht nur die Koordinaten x' verändert werden, sondern auch die *Form* der Wellenfunktion, welches hier durch das gestrichene Symbol ϕ' betont wird.

[**Anmerkung:** Wir Physiker vernachlässigen oft diesen feinen aber wichtigen Unterschied in unserer Notation. Zum Beispiel benutzen wir oft das selbe Symbol für eine Wellenfunktion in den Kartesischen Koordinaten $\psi(x, y, z)$ und für die selbe Wellenfunktion in Sphärischen Koordinaten $\psi(r, \theta, \varphi)$, obwohl die Form der Funktion in den beiden Koordinatsystemen eigentlich anders ist.]



Obwohl die Form der Wellenfunktion in den beiden Koordinatensystemen anders ist, beschreiben sie immer noch den selben Zustand, d.h. wir haben

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{31}$$

Dass die Form der Wellenfunktion unter einer Änderung des Koordinatensystems verändert wird beschreibt man als Passive Transformation der Wellenfunktion. Dies unterscheidet sich von einer Aktiven Transformation welches die veränderung einer Wellenfunktion auf Grund einer veränderung des Zustandes beschreibt. Allerdings gibt es zwischen den beiden Arten von Transformationen einen Zusammenhang. Nehmen wir an, dass die Veränderung des Koordinatensystems durch eine Drehung R: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$ beschrieben wird. Wir können dann die Gleichung (31) umschreiben

$$\phi'(\boldsymbol{x}') = \phi(\boldsymbol{x}) = \phi(R^{-1}\boldsymbol{x}') \tag{32}$$

Nehmen wir dann erst eine infinitesimale Drehung um die Achse $\boldsymbol{n}$ so dass $R^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \Delta\theta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}'$.

Entwickeln wir die Wellenfunktion zur ersten Ordnung in $\Delta\theta$ haben wir

$$\begin{aligned}\phi'(\boldsymbol{x}') &= \phi(R^{-1}\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x} + \Delta\theta\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}') \\ &= \phi(\boldsymbol{x}') - \Delta\theta\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla}'\phi(\boldsymbol{x}') \\ &= (1 - \tfrac{i}{\hbar}\Delta\theta\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L})\phi(\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{33}$$

wobei $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times (-i\hbar\boldsymbol{\nabla})$ der Drehimpuls ist. Potenzierung gibt dann für endliche Transformationen

$$\phi'(\boldsymbol{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}}\phi(\boldsymbol{x}'). \tag{34}$$

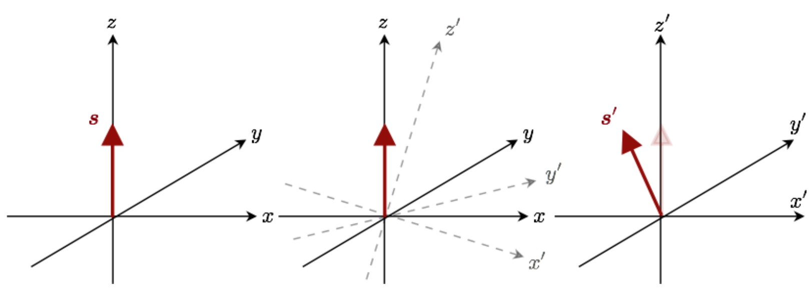
Wir erkennen den Operator $e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}}$ als den Drehoperator, also den Operator der den Zustand dreht. Dies ist die Verbindung zwischen den Passiven- und den Aktiven Transformationen.

Nehmen wir ein zweites Beispiel - ein Spin-1/2-Teilchen. Nehmen wir erst an das der zweikomponentige Spinor χ der diesen Zustand beschreibt nicht von der Ortsvariable abhängt. Das Spin-Vektor (hier mit kleinem $\boldsymbol{s}$ bezeichnet um ihn von dem Operator $\boldsymbol{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ zu Unterscheiden) ist gegeben durch

$$\boldsymbol{s} = \chi^\dagger\boldsymbol{S}\chi = \frac{\hbar}{2}\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi \tag{35}$$

Wenn wir dass Koordinatensystem verändern, müssen auch die Komponenten des Spin-Vektors verändert werden. D.h. in dem Koordinatensystem K' muss der Spin-Vektor $\boldsymbol{s}'$ eine andere Form haben. Dies kann nur erreicht werden wenn wir auch den Spinor χ werändern:

$$\boldsymbol{s}' = \frac{\hbar}{2}\chi'^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi' \tag{36}$$



Aber da der Spinor χ nicht explizit von den Koordinaten abhängt können wir die Relation zwischen den Spinoren in den beiden Koordinatsystemen nicht auf die selbe Form schreiben wie Gl. (32). Stattdessen schreiben wir die Relation zwischen den Spinoren als eine lineare Transformation

$$\chi' = U(R)\chi \tag{37}$$

Bei einer Drehung muss die Länge des Spin-Vektors erhalten bleiben, also ist die Matrix U eine unitäre Matrix. Der Grund dafür, dass der Spinor unter einer Drehung verändert wird, obwohl er nicht eine explizite Funktion der Koordinaten ist, ist dass der Spin eine interne Eigenschaft des Teilchens ist. Wie wir wissen ist die Drehmatrix durch

$$U(R) = e^{-i\frac{1}{2}\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}} \tag{38}$$

gegeben. Dies könnte auch direkt von Gl. (36) gezeigt werden, ähnlich wie wir es in dem nächsten Abschnitt für den Dirac-Spinor machen werden.

Für einen Spinor $\psi(\boldsymbol{x})$ der eine explizite Funktion der Koordinaten ist, müssen wir die beiden Ergebnisse Gl. (32) und (37) zusammen mit (38) benutzen:

$$\psi'(\boldsymbol{x}') = U(R)\psi(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})}\psi(\boldsymbol{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}\psi(\boldsymbol{x}') \tag{39}$$

Aufwärmung: Darstellungen der Drehungen im nicht-relativistischen Fall

- **Dreiervektor**: $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

  Drehung: $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$

- **Skalarfunktion** $\phi(\boldsymbol{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$

  Drehung: $\phi'(\boldsymbol{x}') = \phi(\boldsymbol{x}) = \phi(R^{-1}\boldsymbol{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}}\phi(\boldsymbol{x}')$, mit $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times (-i\hbar\boldsymbol{\nabla})$

- **Zweikomponentiger Spinor** $\chi = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

  Drehung $\chi' = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}}\chi$, mit $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$

- **Zweikomponentige Spinorfunktion** $\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\alpha(\boldsymbol{x}) \\ \beta(\boldsymbol{x})\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \times L^2(\boldsymbol{R}^3)$

  Drehung: $\psi'(\boldsymbol{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}}\psi(\boldsymbol{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}}\psi(R^{-1}\boldsymbol{x}') = e^{\frac{i}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}\psi(\boldsymbol{x}')$, mit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$

Wir interpretieren dieses Ergebnis so, dass das Spin einen internen Drehimpuls zu dem gesamten Drehimpuls beiträgt.

5 Spinor-Darstellung der Lorentz-Transformationen

Zusammenfassung: Dirac-Gleichung

Dirac-Gl.: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [-i\hbar c\alpha^i\partial_i + \beta mc^2]\psi$

Mit $\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbf{1}$, $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$, $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1$ und $(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$, $\beta^\dagger = \beta$.

4 Matrizen die antikommutieren $\rightarrow$ müssen mindestens 4×4 sein.

Standard-Darstellung:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Kovariante Form: $(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi = 0$. Mit Matrizen $\gamma^0 = \beta$ und $\gamma^i = \beta\alpha^i$ die die Eigenschaften $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ haben. In der Standard-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern uns an den Zusammenhang zwischen den Drehungen im 3-dimensionalen Raum und den Transformationen der Spinoren in der nicht-relativistischen Quanten Mechanik. Die Erzeugenden der speziellen unitären Transformationen für 2 komponentige Vektoren (Lie-Gruppe SU(2)) haben die gleichen Kommutations-Relationen (Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$) wie die Erzeugenden der Drehungen im 3-dimensionalen Raum (Lie-Gruppe SO(3)). Es gibt eine 2 zu 1 Abbildung zwischen den Elementen in SU(2) und denen in SO(3). Dieser Zusammenhang wird oft hervorgehoben indem wir die Transformations-Matrizen $U(R)$ als Spinor-Darstellung der Drehungen R bezeichnen. Ein ähnlicher Gruppen-Theoretischer Zusammenhang kann für die Lorentz-Transformationen und den Transformationen des Dirac-Spinors gemacht werden[3]. Man könnte von der Lorentz-Algebra der Erzeugenden für die Lorentz-Gruppe ausgehen, die Spinor-Darstellungen identifizieren und daraus die Transformationseigenschaften der Dirac-Spinoren herausbekommen. Aber um Zeit zu sparen, und um nicht zu weit von dem Schwabl-Buch abzuweichen, werden wir hier dem Schwabl folgen, und danach erst die Verbindung mit der Spinordarstellung der Algebra knüpfen.

Wir fangen mit zwei Annahmen an:

1. Der Dirac-Spinor der im Inertialsystem I durch $\psi(x)$ gegeben ist, ist im Inertialsystem I' durch $\psi'(x')$ gegeben und der folgende Zusammenhang gilt

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x'), \tag{40}$$

   wobei Λ die Lorentz-Transformation zwischen den Inertialsystemen, und $S(\Lambda)$ eine 4×4 Matrix, die von der Lorentz-Transformation abhängt, ist.

2. Die Dirac-Gleichung ist in den beiden Inertialsystemen Form-Invariant:

$$[-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc]\,\psi(x) = 0, \qquad \left[-i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu + mc\right]\psi'(x') = 0. \tag{41}$$

[3] Der vierkomponentige Dirac-Spinor ist eigentlich ein so genannter Bi-Spinor, d.h. er entspricht einer direkten Summe zweier Spinor-Darstellungen der Lorentz-Algebra

Um diese zwei Annahmen zu erfüllen müssen die Matrizen $S(\Lambda)$ gewisse Bedinungen erfüllen. Fangen wir von der Dirac-Gleichung im gestrichenen Inertialsystem an und benutzen die erste Annahme:

$$\left[-i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu + mc\right] S(\Lambda)\psi(x) = 0. \tag{42}$$

Multiplizieren wir mit $S^{-1}(\Lambda)$ von links so haben wir

$$\left[-i\hbar S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\partial'_\mu + mc\right]\psi(x) = 0. \tag{43}$$

Bedenken wir, dass[4]

$$\partial_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu\partial'_\mu \tag{44}$$

so sehen wir, dass wir die Dirac-Gleichung in dem Inertialsystem I wiederbekommen wenn wir verlangen dass

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{45}$$

Diese Bedingung nehmen wir als Definition der Spinor-Darstellung $S(\Lambda)$ der Lorentz-Transformationen. Diese bedingung könnte auch folgendermassen beschrieben werden, indem wir $\gamma'^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)$ definieren. Dann haben wir dass das innere Produkt

$$\gamma'^\mu\partial'_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu \tag{46}$$

invariant ist - d.h. es Transformiert wie ein Lorentz-Skalar.

Für infinitesimale Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu$ muss die Matrix S auch eine infinitesimale Abweichung der Einheitsmatrix sein:

$$S = \mathbb{1} + \tau, \qquad S^{-1} = \mathbb{1} - \tau, \tag{47}$$

wobei $\tau = \tau(\Delta\omega) \sim \mathcal{O}(\Delta\omega)$ ebenfalls infinitesimal und eine Funktion der Elemente der Matrix $\Delta\omega$ ist. Einsetzen in der Definition Gl. (45) gibt uns

$$(\mathbb{1} - \tau)\gamma^\mu(\mathbb{1} + \tau) = \gamma^\mu + \gamma^\mu\tau - \tau\gamma^\mu = \gamma^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{48}$$

D.h. wir haben die Bedingung

$$[\gamma^\mu, \tau] = \Delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{49}$$

Um die Norm des Spinors zu bewahren können wir auch verlangen dass $\det S = 1$ welches für die infinitesimale Matrix τ bedeutet, dass

$$1 = \det S = \det(\mathbb{1} + \tau) = \det\mathbb{1} + \mathrm{Sp}\ \tau = 1 + \mathrm{Sp}\ \tau. \tag{50}$$

also, dass $\mathrm{Sp}\ \tau = 0$. Die Matrix-Gleichung hat die Lösung

$$\tau = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \tag{51}$$

wobei

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \begin{cases} 0, & \mu = \nu \\ -i\alpha^i, & \mu = 0, \nu = i \\ \epsilon_{ijk}\Sigma^k, & \mu = i, \nu = j \end{cases}, \quad \text{wobei} \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{52}$$

[4] Mittels $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu\partial'_\mu$.

Diese Gleichungen werden als Übungsaufgabe gegeben (Blatt 10). Die infinitesimale Spinor-Transformation ist dann

$$
\begin{aligned}
S &= \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \\
&= \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{0\nu}\sigma_{0\nu} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{i\nu}\sigma_{i\nu} \\
&= \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{0i}\sigma_{0i} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{i0}\sigma_{i0} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{ij}\sigma_{ij} \\
&= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\Delta\omega^{0}{}_{i}\sigma_{0i} + \frac{i}{4}\Delta\omega^{i}{}_{j}\sigma_{ij} \\
&= \mathbb{1} - \frac{i}{2}\Delta\eta_i\sigma_{0i} + \frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Delta\theta_k\sigma_{ij}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Mit den vereinfachten Formen Gl. (52), und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$, haben wir

$$
S = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\Delta\theta_i\Sigma^i - \frac{i}{2}\Delta\eta_i\left(-i\alpha^i\right). \tag{54}
$$

Macht man den Vergleich mit der Form der Lorentz-Transformationen $\Lambda = \mathbb{1} + \Delta\theta_i\mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i\mathcal{K}^i$ so liegt es nahe die Matrizen $-i\alpha^i$ und Σ^i mit der Spinor-Darstellung der Dreh- und Boost-Erzeugenden zu identifizieren. In der Tat, schreiben wir

$$
\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_{ij} = \Sigma^i = S(\mathcal{I}^i), \qquad \sigma_{0i} = -i\alpha^i = S(\mathcal{K}^i) \tag{55}
$$

so sehen wir, dass die Spinor-Darstellung die selbe Algebra hat wie die Algebra der Erzeugenden der Lorentz-Transformationen (bis auf einen Faktor 2, vergleichen Sie mit $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ und $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$).

Spinordarstellung der Lorentz-Algebra

Die Spinor-Darstellung einer allgemeinen infinitesimalen Lorentz-Transformation in der eingeschränkten Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\Lambda = \mathbb{1} + i\Delta\theta_i \mathcal{I}^i - i\Delta\eta_i \mathcal{K}^i, \tag{56}$$

ist gegeben durch

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\Delta\theta_i S(\mathcal{I}^i) - \frac{i}{2}\Delta\eta_i S(\mathcal{K}^i) \tag{57}$$

wobei $S(\mathcal{I}^k) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_{ij} = \Sigma^k$ und $S(\mathcal{K}^i) = \sigma_{0i} = -i\alpha^i$ die Spinordarstellungen der Dreh- und Boost-Erzeugenden sind. Die Spinordarstellungen der Erzeugenden erfüllen die selbe Algebra wie die Erzeugenden selbst

$$[S(\mathcal{I}^i), S(\mathcal{I}^j)] = 2i\epsilon_{ijk}S(\mathcal{I}^k), \quad [S(\mathcal{K}^i), S(\mathcal{K}^j)] = -2i\epsilon_{ijk}S(\mathcal{I}^k), \quad [S(\mathcal{I}^i), S(\mathcal{K}^j)] = 2i\epsilon_{ijk}S(\mathcal{K}^k) \tag{58}$$

Die endlichen Lorentz-Transformationen bekommt man durch potenzieren der infinitesimalen Transformationen.

$$S(R_i) = e^{i\frac{\theta}{2}S(\mathcal{I}^i)} = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^i} = \cos\frac{\theta}{2} + i\Sigma^i \sin\frac{\theta}{2}, \qquad S(L_i) = e^{-i\frac{\eta}{2}S(\mathcal{K}^i)} = e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i} = \cosh\frac{\eta}{2} + \alpha^i \sinh\frac{\eta}{2}. \tag{59}$$

Jetzt wo wir die Spinordarstellungen der eingeschränkten Lorentz-gruppe haben, können wir die Spinordarstellungen der ganzen (homogenen) Lorentz-Gruppe bekommen indem wir noch die Spinordarstellungen für die diskreten Transformationen $\{P, T, PT\}$ finden. Da diese auch die Gl. (45) genügen müssen, haben wir für die Raum-Spiegelung

$$\begin{matrix} S^{-1}(P)\gamma^0 S(P) = \gamma^0 \\ S^{-1}(P)\gamma^i S(P) = -\gamma^i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} [\gamma^0, S(P)] = 0 \\ \{\gamma^i, S(P)\} = 0. \end{matrix} \tag{60}$$

Diese gleichung wird erfüllt von (in der Standarddarstellung) $S(P) = e^{i\varphi_P}\gamma^0$, wobei φ_P eine beliebige phase ist.

Für die Zeit-Spiegelung ist es einfacher erst die Raum- und Zeitspiegelungen zu betrachten und daraus die Zeitspiegelung zu bekommen.

$$\begin{matrix} S^{-1}(PT)\gamma^0 S(PT) = -\gamma^0 \\ S^{-1}(PT)\gamma^i S(PT) = -\gamma^i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \{\gamma^0, S(PT)\} = 0 \\ \{\gamma^i, S(PT)\} = 0. \end{matrix} \tag{61}$$

Eine Matrix die mit allen γ-Matrizen anti-kommutiert ist $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Wir können also schreiben $S(PT) = e^{i\varphi_{PT}}\gamma^5$ wobei φ_{PT} auch eine beliebige phase ist. Die Spinordarstellung der Zeit-Spiegelung können wir durch $S(T) = S(P)S(PT) = e^{i\varphi_T}\gamma^0\gamma^5$ mit $\varphi_T = \varphi_P + \varphi_{PT}$ definieren. Diese Darstellung genügt

$$\begin{matrix} S^{-1}(T)\gamma^0 S(T) = -\gamma^0 \\ S^{-1}(T)\gamma^i S(T) = \gamma^i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \{\gamma^0, S(T)\} = 0 \\ [\gamma^i, S(T)] = 0. \end{matrix} \tag{62}$$

Spinordarstellung der diskreten Transformationen

Die Spinor-Darstellungen der diskreten Transformationen P, T, PT sind durch $S(P) = e^{i\varphi_P}\gamma^0$, $S(T) = e^{i\varphi_T}\gamma^0\gamma^5$ und $S(PT) = e^{i\varphi_{PT}}\gamma^5$ mit $\varphi_{PT} = \varphi_P - \varphi_T$, gegeben. Eine konsequente Wahl ist (Matrixform in Standarddarstellung)

$$S(P) = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad S(T) = \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad S(PT) = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

Diese Wahl von Darstellung hat $S(T)S(T) = S^2(T) = -\mathbb{1}$, was etwas komisch vorkommen könnte. Allerdings ist das minus Zeichen, sowie die Phasen $\varphi_T, \varphi_P, \varphi_{PT}$, nicht beobachtbar, da es keine Konsequenzen für die transformierten Matrizen $\gamma'^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)$ hat.

6 Adjungierte Spinortransformation

Viele Observablen werden in Bilinearform $\psi^\dagger A\psi$ dargestellt. Beispiele sind die Dichte $\psi^\dagger\psi$ und Strohmdichte $c\psi^\dagger\alpha^i\psi$. Um herauszufinden wie diese sich unter Lorentz-Transformationen verhalten, müssen wir wissen wie der **Hermitesch adjungierte Spinor** transformiert $\psi^\dagger \mapsto \psi^\dagger S^\dagger$. Da $S^\dagger \neq S^{-1}$ sind diese Observablen im allgemeinen nicht invariant unter Lorentz-Transformationen. Ausnahmen sind Transformationen die Drehungen entsprechen da

$$S^\dagger(R_i) = (e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^i})^\dagger = e^{-i\frac{\theta}{2}\Sigma^i} = S^{-1}(R_i),$$

welches von der Relation $(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma$ folgt. Für Lorentz-Boosts haben wir aber, dass

$$S^\dagger(L_i) = (e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i})^\dagger = e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i} = S(L_i),$$

wobei $(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i$ benutzt wurde. Dass diese nicht invariant unter Lorentz-Boosts sind, hat mit der Raum-Kontraktion zu tun - die Dichte/Strohmdichten hängen von dem Volumen ab.

Es ist oft besser mit dem **adjungierten Spinor** $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$ zu arbeiten. Benutzt man, dass $\gamma^0\alpha^i\gamma^0 = -\alpha^i$ und $\gamma^0\Sigma^i\gamma^0 = \Sigma^i$, haben wir

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda), \qquad \Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}^\uparrow_+ \cup \mathcal{L}^\uparrow_-. \tag{64}$$

Dass dies für die Transformationen in $\mathcal{L}^\uparrow_+$ gilt sollte offenbar sein, und kann leicht für die infinitesimalen Transformationen bestätigt werden. Das es für die Transformationen $\mathcal{L}^\uparrow_-$ gilt folgt von der Relation $\gamma^0 S^\dagger(P)\gamma^0 = \gamma^0(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 = S^{-1}(P)$ und, dass $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow_-$ als $\Lambda = P\Lambda'$ mit $\Lambda' \in \mathcal{L}^\uparrow_+$ geschrieben werden kann. Bei Transformationen die den Zeit-Sinn verändern, d.h. $\Lambda \in \mathcal{L}^\downarrow = \mathcal{L}^\downarrow_+ \cup \mathcal{L}^\downarrow_-$, wird durch diese operation dass Vorzeichen verändert:

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = -S^{-1}(\Lambda), \qquad \Lambda \in \mathcal{L}^\downarrow = \mathcal{L}^\downarrow_+ \cup \mathcal{L}^\downarrow_- \tag{65}$$

Somit sehen wir, dass der adjungierte Spinor transfromiert wie

$$\bar\psi(x) \mapsto \bar\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1} \tag{66}$$

und, dass die Bilinearform

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \mapsto \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{67}$$

unter orthochronen Transformationen wie ein Skalar transformiert. Schreiben wir die Strohmdichten als

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \mapsto j'^\mu = \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \tag{68}$$

unter orthochronen Transformationen wie ein Vierervektor transformiert. Wir können auch die transformation der so-genannten chiralen Strohmdichte

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \mapsto \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' &= \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^5 S\psi \\ &= \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{aligned} \tag{69}$$

berechnen. Hier wurde in der letzten Gleichung benutzt dass $S^{-1}\gamma^5 S = \det\Lambda$ welches durch explizites Untersuchen der verschiedenen Matrizen $S(\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow)$, $S(P)$, $S(T)$, und $S(PT)$ gezeigt werden kann.

Transformationseigenschaften von Bilinearformen

Da die Matrizen $\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5$ eine linear-unabhängige Basis für die 4×4 Matrizen bilden, kann jede Observable A durch eine Linearkombination von diesen dargestellt werden. Um zu wissen wie eine Observable $\bar{\psi}\gamma^0 A\psi$ unter einer Lorentz-Transformation transformiert, muss man also wissen wie Bilinearformen mit diesen Matrizen transformiert.

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}'(x')\psi(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{Skalar} \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x), && \text{Vektor} \\ &\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{antisymmetrischer Tensor} \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = \det(\Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x), && \text{Pseudoskalar} \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma^5\gamma^\mu\psi'(x') = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x), && \text{Pseudovektor} \end{aligned} \tag{70}$$

Oben wurden nur die Lorentz-Transformationen die den Zeit-Sinn nicht ändern berücksichtigt. Die Transformationseigenschaften von Bilinearformen sind z.B. wichtig wenn man versucht verschiedene Wechselwirkungen in einen Hamilton-Operator oder Lagrangian ausprobiert. Wenn diese die Lorentz-Invarianz genügen sollen, dann muss man verschiedene Terme so zusammenbauen, dass das Produkt ein Lorentz-Skalar ist.

7 Freie Lösungen der Dirac-Gleichung

Wie es schon in Abschnitt 2 gesagt wurde, ist es oft nützlich von dem Ruhesystem auszugehen. In dem Ruhesystem (I') ist der Dirac-Spinor unabhängig von den Ortsvariablen und die Dirac-Gleichung nimmt die Form

$$(-i\hbar\gamma^0\partial_0' + mc)\psi'(x'^0) = 0. \tag{71}$$

Diese Gleichung hat Lösungen mit ebene-Wellen-Form

$$\psi_r^{(+)\prime}(x'^0) = u_r' e^{-\frac{i}{\hbar}p_0' x^0} \quad \text{und} \quad \psi_r^{(-)\prime}(x'^0) = v_r' e^{\frac{i}{\hbar}p_0' x'^0},$$

mit $p'^0 = p_0' = mc$. Die Spinoren u_r' und v_r' genügen den Gleichungen

$$mc(-\gamma^0 + 1)u_r' = 0, \qquad mc(\gamma^0 + 1)v_r' = 0, \tag{72}$$

d.h. die Lösungen sind Eigenzustände von γ^0 mit Eigenwerten $+1$ und -1. Also haben wir

$$u_r' = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_r' = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix}. \tag{73}$$

Hier sind die zweikomponentigen Spinoren χ_r, $r = 1, 2$ beliebig (aber orthonormal zu einander $\chi_r^\dagger \chi_s = \delta_{rs}$). Da Σ^i in dem Ruhesystem mit dem Dirac-Hamilton-Operator vertauschen, kann man χ_r als Eigenzustände einer dieser Matrizen wählen. Konventionell wählt man dafür Σ^3 so dass $\chi_1 = (1, 0)^T$ und $\chi_2 = (0, 1)^T$. Die lösungen in einem Inertialsystem I dass sich mit relativer Geschwindigkeit $-\boldsymbol{v}$ bewegt, kann durch einen Lorentz-Boost erhalten werden

$$S(\Lambda)\psi^{(+)\prime}(x^{0\prime}) = \psi_r^{(+)}(x) \equiv u_r(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} \quad \text{und} \quad S(\Lambda)\psi^{(-)\prime}(x^{0\prime}) = \psi_r^{(-)}(x) \equiv v_r(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} \tag{74}$$

Der Impuls wird dabei wie folgt transformiert

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p'^\nu = \gamma m(c, \boldsymbol{v}) = (p^0, \boldsymbol{p}), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{75}$$

Es ist nützlich die relation zwischen der relativen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, und dem Impuls $\boldsymbol{p}$ den das Teilchen in diesem Inertialsystem hat, explizit aufzuschreiben:

$$\boldsymbol{p} = \gamma(v)m\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{p}^2 = \frac{m^2c^2|\boldsymbol{v}|^2}{c^2 - |\boldsymbol{v}|^2} \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{v}}{c} = \frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + (mc)^2}} = \frac{\boldsymbol{p}}{p^0} = \boldsymbol{n}\tanh\eta, \tag{76}$$

wobei wir die Definitionen $\cosh\eta = \gamma$, $\sinh\eta = \gamma|\boldsymbol{v}|/c$ und $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ benutzt haben. Die Spinor-Darstellung dieser Transformation ist gegeben durch

$$S(\Lambda) = S(\boldsymbol{p}) \equiv \cosh\frac{\eta}{2} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\eta}{2} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Also sind die Lösungen in diesem Inertialsystem

$$u_r(\boldsymbol{p}) = S(\boldsymbol{p})u_r' = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2}\chi_r \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\chi_r \end{pmatrix}, \qquad v_r(\boldsymbol{p}) = S(\boldsymbol{p})v_r' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\chi_r \\ \cosh\frac{\eta}{2}\chi_r \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Benutzen wir dass $\cosh\eta = \gamma = p^0/mc$ und

$$\cosh\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\eta + 1}{2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}, \qquad \sinh\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\eta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E - mc^2}{2mc^2}} \tag{79}$$

und folglich $\tanh(\eta/2) = \sinh(\eta/2)/\cosh(\eta/2) = c|\boldsymbol{p}|/(E + mc^2)$, haben wir

$$u_r(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{(E+mc^2)}\chi_r \end{pmatrix}, \qquad v_r(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{(E+mc^2)}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Die vollen Lösungen in dem Inertialsystem I sind dann

$$\psi_r^{(+)}(x) = u_r(\boldsymbol{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \qquad \psi_r^{(-)}(x) = v_r(\boldsymbol{p}) e^{\frac{i}{\hbar}Et} e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{81}$$

Da die Lösungen u_r, $r = 1, 2$, entartet sind (die gleiche Energie haben) können wir eine beliebige Linearkombination von diesen Spinoren aufbauen.

$$\psi^{(+)}(x) = \sum_r c_r \psi_r^{(+)}(x) = \sum_r c_r u_r(\boldsymbol{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{82}$$

mit $\sum_r |c_r|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, und ähnlich für Teilchen mit negativer Energie $\psi^{(-)}$.

7.1 Orthogonalitätsrelationen

Betrachten wir die Orthogonalitätsrelationen für $u_r(\boldsymbol{p})$, $r = 1, 2$:

$$u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) = u_r'^\dagger S^\dagger S u_s'. \tag{83}$$

Hier haben wir

$$S^\dagger S = S^2 = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\eta \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \tag{84}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) &= (\chi_r^\dagger, 0) \begin{pmatrix} \cosh\eta & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\eta \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} = \cosh\eta\,\delta_{rs} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \delta_{rs} \\ &= \left(\frac{E}{mc^2}\right) \delta_{rs}. \end{aligned} \tag{85}$$

Wir sehen hier dass die Wellenfunktionen in diesem Inertialsystem eine andere Normalisierung haben als in dem Ruhesystem. Die Dichte ist dann gegeben durch

$$(\psi^{(+)}(x))^\dagger \psi^{(+)}(x) = \sum_{r,s} c_r^* c_s u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \sum_{r,s} c_r^* c_s \delta_{rs} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (v/c)^2}}. \tag{86}$$

Die Wellenfunktionen erscheinen für höhere Geschwindigkeiten also dichter als im Ruhesystem. Dies hängt, wie schon erwähnt, mit der Lorentz-Kontraktion des Volumens zusammen, $dV = \sqrt{1 - (v/c)^2} dV'$.

Andererseits haben wir bereits gezeigt dass die Bilinearform $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$ unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Also müssen wir auch haben dass,

$$\bar{u}_r(\boldsymbol{p})u_s(\boldsymbol{p}) = \bar{u}'_r S^{-1} S u'_s = \bar{u}'_r u'_s \tag{87}$$

und ähnlich für $v_r(\boldsymbol{p})$. Da die Lösungen Eigenzustände von γ^0, und ausserdem orthonormal sind, haben wir

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(\boldsymbol{p})u_s(p^0,\boldsymbol{p}) &= u_r'^\dagger\gamma^0 u'_s = +\delta_{rs} \\
\bar{v}_r(\boldsymbol{p})v_s(p^0,\boldsymbol{p}) &= v_r'^\dagger\gamma^0 v'_s = -\delta_{rs} \\
\bar{u}_r(\boldsymbol{p})v_s(\boldsymbol{p}) &= u_r'^\dagger\gamma^0 v'_s = 0 \\
\bar{v}_r(\boldsymbol{p})u_s(\boldsymbol{p}) &= v_r'^\dagger\gamma^0 u'_s = 0
\end{aligned} \tag{88}$$

Die Eigenzustände $\psi^{(+)}(x)$ mit positiven Energien genügen dann der Normalisierung

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(+)}(x) = \sum_{r,s} c_r^* c_s \bar{\psi}_r^{(+)}(x)\psi_s^{(+)}(x) = \sum_{r,s} c_r^* c_s \bar{u}_r(\boldsymbol{p})u_s(\boldsymbol{p}) = 1 \tag{89}$$

Da diese Normierung Lorentz-Invariant ist, werden oft die Orthogonalitäts relationen in dieser Form dargestellt, und man arbeitet öfter mit dem adjungierten Spinor.

$\star\star\star$ Zusätsliche Information

In diesem Abschnitt werde ich versuchen den Ursprung von Kovarianten und Kontravarianten Vierervektoren, ihre Transformations-Eigenschaften, oben/unten Indizes, Metrik, …etc, etwas Formeller zu präsentieren. Wenn das nicht etwas ist was Sie interessiert, können Sie diesen Abschnitt ignorieren.

Da wir am Ende an dem Minkowski-Raum interessiert sind, präsentiere ich hier den Formalismus für den reellen Vektor-Raum $\mathbb{R}^4$, obwohl es unkompliziert ist die sachen zu verallgemeinern. Die präsentation ist keineswegs eingehend, aber ich hoffe, dass es vielleicht ein Einblick verschaffen kann.

Vektor-Raum mit einem inneren Produkt

Ein Vektor x in dem reellen 4-dimensionellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch

$$x = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu \tag{90}$$

wobei $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ die Basisvektoren des Raums sind. Haben wir die Basisvektoren gewählt, können wir den Vektor einfach durch die Komponeten ausdrücken

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{91}$$

Das Innere-Produkt definieren wir als eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\langle x, y\rangle = g(x, x) \tag{92}$$

D.h. eine Funktion die zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^4$ als Argument nehmen und eine reelle Zahl wiedergibt. Die bilineare Form g hat per Definition die Eigenschaften

$$\begin{aligned} g(x, y+z) &= g(x,y) + g(x,z) \\ g(x+z, y) &= g(x,y) + g(z,y) \\ g(\lambda x, y) &= g(x, \lambda y) = \lambda g(x,y) \end{aligned} \tag{93}$$

Daraus folgt dass wir das Innere-Produkt schreiben können als

$$g(x,y) = g(x^\mu \boldsymbol{e}_\mu, y^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = x^\mu g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) y^\nu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \tag{94}$$

wobei wir $g_{\mu\nu} = g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)$ definiert haben. Wir können dies durch die Matrix-Darstellungen

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{95}$$

schreiben als

$$\langle x, y\rangle = x^T g y. \tag{96}$$

Das innere Produkt verleiht, durch die Metrik g, dem Vektor-Raum eine Geometrie. Zum Beispiel haben wir für ein Euklidischen Raum $g = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$, und das innere Produkt nimmt die einfache Form $\langle x, y\rangle = x^T y$, also das gewöhnliche Skalar-Produkt. Für den Minkowski-Raum ist bekanntlich $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und das innere Produkt nimmt die Form $\langle x, y\rangle = (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$.

Dualer Vektor-Raum

Der duale Vektor-Raum $V^\star$ ist der Raum von linearen Formen $F^\star$ die einen Vektor in $V = \mathbb{R}^4$ zu den reellen Zahlen abbildet, d.h. für $x \in \mathbb{R}^4$ haben wir $F^\star(x) \in \mathbb{R}$. Der duale Raum ist zwar ein ziemlich abstrakter Vektor-Raum, aber er erfüllt alle Eigenschaften die ein Vektor-Raum erfüllen sollte. Eine Basis des dualen Vektor-Raums definieren wir durch

$$\boldsymbol{e}^\mu : \quad \boldsymbol{e}^\mu(\boldsymbol{e}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu \tag{97}$$

und einen Vektor in dem dualen Vektor-Raum können wir dann schreiben als

$$y^\star = y_\mu \boldsymbol{e}^\mu : \quad y^\star(x) = y_\mu \boldsymbol{e}^\mu(x) = y_\mu \boldsymbol{e}^\mu(\boldsymbol{e}_\nu) x^\nu = y_\mu x^\mu \tag{98}$$

Durch die bilineare Abbildung g können wir für jedes Element $y \in \mathbb{R}^4$ eine solche lineare Form $y^\star$ (oder "Vektor" da es ein Element eines Vektor-Raums ist) in dem dualen Raum definieren

$$y^\star : \ y^\star(x) = g(y, x) = y^\mu g_{\mu\nu} x^\nu . \tag{99}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit Gleichung (98) so haben wir

$$y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \tag{100}$$

Transformationen - Kovariant und Kontravariant

Die Matrixdarstellung hängt von der Wahl der Basis ab, der Punkt zu dem der Vektor x zeigt, ist aber unabhängig von der Basis. Beschreiben wir einen Wechsel der Basis durch einer linearen Transformation (das wir hier die Matrix als Inverse schreiben wird später nützlich sein)

$$\boldsymbol{e}_\mu \mapsto \boldsymbol{e}'_\mu = \boldsymbol{e}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{101}$$

so müssen die Komponenten ebenso verändert werden $x^\mu \mapsto x'^\mu$ so dass der Vektor immer noch zu dem selben Punkt in $\mathbb{R}^4$ zeigt.

$$x'^\mu \boldsymbol{e}'_\mu = x'^\mu \boldsymbol{e}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = x^\nu \boldsymbol{e}_\nu \tag{102}$$

also haben wir

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu = x^\nu \quad \text{oder} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{103}$$

wobei $\Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$. Wir sagen, dass die Komponenten x^μ **kontravariant** transformieren um die veränderung der Basis zu kompensieren.

Wenn wir die Basisvektoren in $V = \mathbb{R}^4$ verändern, müssen wir auch die Basisvektoren in dem dualen Raum $V^\star$ verändern damit $\boldsymbol{e}'^\mu(\boldsymbol{e}'_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$. Dies wird erreicht in dem wir die Basisvektoren in dem dualen Raum auch kontravariant transformieren lassen

$$\boldsymbol{e}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \boldsymbol{e}^\nu \tag{104}$$

Damit der Vektor im dualen Raum Basis-invariant ist, müssen also die Komponenten x_μ genau so wie die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\mu$ in dem Raum $\mathbb{R}^4$ transformieren

$$y'_\mu = y_\nu {(\Lambda^{-1})^\nu}_\mu \tag{105}$$

wir sagen dass diese Komponenten **kovariant** transformieren. Da $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$, haben wir mit

$$y'_\mu = g_{\mu\nu} y'^\nu \Rightarrow y_\rho {(\Lambda^{-1})^\rho}_\mu = g_{\mu\nu} {\Lambda^\nu}_\sigma y^\sigma \Rightarrow y_\rho = {\Lambda^\mu}_\rho g_{\mu\nu} {\Lambda^\nu}_\sigma y^\sigma$$

Also $g_{\rho\sigma} = {\Lambda^\mu}_\rho g_{\mu\nu} {\Lambda^\nu}_\sigma$, welches wir für die Minkowski-Metrik $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ als die fundamentale Bedingung der Lorentz-Gruppe kennen.

Anmerkungen zu der Notation:

(1) Die Gleichung $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ kann natürlich invertiert werden. Mann benutzt für die Inverse von $g_{\mu\nu}$ oft die Notation $g^{\mu\nu}$ so dass $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = {\delta^\mu}_\nu$. Dadurch haben wir $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$. Man sagt oft dass $g_{\mu\nu}$ die Indize nach Unten ziehen während $g^{\mu\nu}$ die Indize nach Oben ziehen.

(2) Nehmen wir die Gleichung $y_\rho {(\Lambda^{-1})^\rho}_\mu = g_{\mu\nu} {\Lambda^\nu}_\sigma y^\sigma$. Durch die Notation in (1) können wir das Index von y^σ auf der rechten Seite runterziehen und die Gleichung schreiben als ${(\Lambda^{-1})^\rho}_\mu = g_{\mu\nu} {\Lambda^\nu}_\sigma g^{\sigma\rho}$. Benutzen wir dann auch die Konvention, dass $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ die Indize nach unten/oben ziehen für die Matrix ${\Lambda^\nu}_\sigma$ so haben wir ${(\Lambda^{-1})^\rho}_\mu = {\Lambda_\mu}^\rho$.

(2) Oft benennt man mit x einfach die Reihe von Komponenten x^μ (die also Basis-abhängig ist, im gegensatz zu dem eigentlichen Vektor) und benutzt für eine Transformation $x' = \Lambda x$. Mit dieser Notation kann man dann schreiben

$$\langle x', y' \rangle = x'^T g y' = x^T \Lambda^T g \Lambda y = x^T g y = \langle x, y \rangle \tag{106}$$

wobei also $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Kovariant, Kontravariant, Metrik, etc.

Die Komponenten x^μ eines Vektors in $V = \mathbb{R}^4$ transformieren unter einer änderung des Koordinatensystems kontravariant zu der änderung der Basisvektoren. Die Komponenten x_μ des dualen Vektors in $V^\star$ transformieren Kovariant.

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\mu, \qquad x_\mu \mapsto x'_\mu = x_\nu {(\Lambda^{-1})^\nu}_\mu \tag{107}$$

Das innere Produkt $\langle x, y \rangle = g(x, y)$ kann durch die Metrik $g_{\mu\nu} = g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)$ geschrieben werden

$$\langle x, y \rangle = x^\mu g_{\mu\nu} y^\mu \tag{108}$$

Die Metrik gibt uns auch eine Abbildung von den Komponenten x^μ eines Vektors in V zu den Komponenten x_μ des dualen Vektors in $V^\star$:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{109}$$