Hauptklausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2011/12

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

[Hinweis: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebenes A4-Blatt (beidseitig beschrieben) zugelassen. Die Gesamtzahl der Punkte ist 30, aber 25 Punkte entsprechen 100%er Lösung.]

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Messung

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen mit Eigenzuständen $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Das Teilchen sei im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle. \tag{1}$$

Wir messen die Observable,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} = a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z \tag{2}$$

und $|\boldsymbol{a}| = 1$. Welche Werte messen wir mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Getriebener harmonischer Oszillator:

Ein ein-dimensionaler harmonischer Oszillator sei durch $H_0 = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ charakterisiert. Er wird getrieben durch ein angelegtes Wechselfeld, was im Hamilton-Operator zu einem weiteren Term der Form $H_1(t) = V_0(a^\dagger e^{-i\omega t} + a e^{i\omega t})e^{\eta t}$ führt.

(a) (4 Punkte) Berechnen sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie in $H_1(t)$ die Übergangsrate vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand des ungestörten Hamilton-Operators H_0. Wählen sie als untere Grenze ihres Integrals die Zeit $t_0 \to -\infty$

(b) (1 Punkt) Bilden Sie das Limes $\eta \to 0$. Wie sieht die in der vorigen Teilaufgabe berechnete Übergangsrate aus?

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Wechselwirkende Spins

Ein System von zwei wechselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem angelegten Magnetfeld wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H = -\sum_{i=1}^{2}\frac{2\mu_B}{\hbar}BS_{z,i} - J\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2. \tag{3}$$

Finden Sie die Eigenzustände und Eigenenergien des Hamilton-Operators.

[**Hinweis:** Drücken Sie den Hamilton-Operator durch den Gesamtspin $\boldsymbol{S}^2 = (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2)^2$ und $S_z = S_{z,1} + S_{z,2}$ aus.]

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Jaynes-Cummings-Modell

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \tag{4}$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $N = \sigma_z + 2a^\dagger a$ mit dem Hamilton-Operator vertauscht.
Dies kann man als Erhaltung der Gesamtzahl von Erregungen in dem System verstehen. Daraus kann man schliessen, dass wenn wir die Zeitentwicklung von einem Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |+,0\rangle$ betrachten, so können wir für $t > 0$ nur eine Superposition wie

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|+,0\rangle + \beta(t)|-,1\rangle \tag{5}$$

bekommen, da dies die einzigen Zustände mit der selben Anzahl $N = 1$ von Erregungen sind.

(b) (1 Punkt) Leiten Sie von der Schrödinger-Gleichung $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ eine Differential-Gleichung für $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ her.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Amplituden $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ in dem Spezialfall $\omega_0 = \omega$.

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle a^\dagger a\rangle$ wobei $\langle\ldots\rangle = \langle\psi(t)|\ldots|\psi(t)\rangle$. Überprüfen Sie auch, dass $\langle N\rangle = \langle\sigma_z + 2a^\dagger a\rangle = 1$.

Bitte wenden ...

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Bewegungsgleichung der Dichtematrix eines harmonischen Oszillators

Ein harmonischer Oszillator wird durch den Hamilton-Operator $H = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ charakterisiert. Die Zeitentwicklung der Dichtematrix $\hat{\rho}$ wird durch die quantenmechanische Liouville-Gleichung $i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [H, \hat{\rho}]$ beschrieben.

(a) (1 Punkt) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung für die Elemente $\rho_{n,n'}(t) = \langle n|\hat{\rho}(t)|n'\rangle$ mit $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ her, und lösen Sie diese für gegebene Anfangsbedingung $\hat{\rho}(t=0) = \hat{\rho}_0$.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie die Lösungen von Teilaufgabe (a) und berechnen Sie den Erwartungswert $\bar{x}(t) \equiv \mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)x)$, wobei $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a^\dagger + a)$. Zeigen Sie, dass dies auf die Form $\bar{x}(t) = \bar{x}(0)\cos\omega_0 t + \frac{\dot{\bar{x}}(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ gebracht werden kann.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Dirac-Matrizen:

Zeigen Sie, dass für die Dirac-Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$, β, und γ^ν die beiden Relationen gelten

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2, \qquad (\gamma^\mu p_\mu)^2 = (p^0)^2 - (\boldsymbol{p})^2. \tag{6}$$

[**Hinweis:** $\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1}$, $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$, $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$.]

Aufgabe 7 **(5 Punkte)**

Relativistischer Spin unter Lorentz-Transformationen

Die relativistische Spindichte ist gegeben durch

$$\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2}\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\Sigma}\psi(x), \qquad \Sigma^i = \begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}. \tag{7}$$

(a) (2 Punkte) Die Spinor-Darstellung für eine Drehung um eine Achse $\boldsymbol{n}$, $|\boldsymbol{n}| = 1$, um den Winkel θ ist gegeben durch $S(\boldsymbol{n},\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}$. Zeigen Sie, dass die transformierte Spindichte nach der Drehung gegeben ist durch

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}_{||} + \boldsymbol{s}_\perp\cos\theta - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}_\perp)\sin\theta \tag{8}$$

wobei $\boldsymbol{s}_{||} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{s}_\perp = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_{||}$.

(b) (3 Punkte) Die Spinor-Darstellung für ein Lorentz-Boost entlang der Achse $\boldsymbol{n}$ mit Rapidität η ist gegeben durch $S(\boldsymbol{n},\eta) = e^{-\frac{\eta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$, wobei $\alpha^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}$. Nehmen Sie als ungestrichenes Inertialsystem das Ruhesystem, und zeigen Sie, dass die transformierte Spindichte nach dem Lorentz-Boost gegeben ist durch

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}_\perp + \boldsymbol{s}_{||}\cosh\eta. \tag{9}$$

Hierbei sollten Sie benutzen, dass der vierkomponentige Spinor im Ruhesystem die Form $\psi(x) \propto \begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}$ oder $\psi(x) \propto \begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}$ mit ein beliebigen zweikomponentigen Spinor χ hat.

[**Hinweis:** Die folgenden Relationen könnten bei beiden Teilaufgaben nützlich sein:
$[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = 2i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\sigma})$ und $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ für $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$.]

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Drehimpulsen $j_1 = 2$ und $j_2 = 1$ und entsprechenden Drehimpulsoperatoren $\boldsymbol{J}_1$ und $\boldsymbol{J}_2$. Der Gesamtdrehimpuls sei $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$. Ermitteln Sie die möglichen Eigenzustände von $\boldsymbol{J}^2$ und J_z und drücken Sie die Zustände

(a) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |3, 2\rangle$,

(b) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |3, 1\rangle$,

(c) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |2, 2\rangle$

durch die Zustände $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ aus, d.h. berechnen Sie die entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Hinweis: Folgende Formel ist hilfreich:

$$J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle \tag{10}$$