Übungsblatt 8: Lösungen

January 10, 2012

25. Kohärente Zustände

a) i) $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = 1.$

Die Eigenschaft $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1$ folgt von der Relation $e^X e^Y = e^{\frac{1}{2}[X,Y]}e^{X+Y}$, mit $X = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$ und $Y = X^\dagger = -X$, zusammen mit der Vertauschungsregel:

$$[X, Y] = [X, -X] = -[X, X] = 0 \tag{1}$$

und mit X und Y vertauscht für $D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = 1$.

ii) $D(\alpha)D(\beta) = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}D(\alpha + \beta)$

Diese Eigenschaft folgt von der Relation $e^X e^Y = e^{\frac{1}{2}[X,Y]}e^{X+Y}$, mit $X = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$ und $Y = \beta a^\dagger - \beta^* a$, zusammen mit der Vertauschungsregel:

$$[X, Y] = [\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a] = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta \tag{2}$$

iii) $D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha$ und $D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$

Diese Eigenschaften folgen von der Relation $e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y]$, mit $X = \alpha^* a - \alpha a^\dagger$ und $Y = a$ für die erste Gleichung, und $Y = a^\dagger$ für die zweite, zusammen mit den Vertauschungsregeln:

$$[\alpha^* a - \alpha a^\dagger, a] = \alpha, \qquad [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, a^\dagger] = \alpha^* \tag{3}$$

iv) $D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}$

Diese Eigenschaft folgt von der Relation $e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}$ mit $X = \alpha a^\dagger$ und $Y = -\alpha^* a$, zusammen mit den Vertauschungsregeln

$$[X, Y] = [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a] = -|\alpha|^2[a^\dagger, a] = |\alpha|^2 \tag{4}$$

v) $e^{i\omega t a^\dagger a}D(\alpha)e^{-i\omega t a^\dagger a} = D(\alpha e^{i\omega t})$

Wir erinnern uns dass $e^{i\omega t a^\dagger a}ae^{-i\omega t a^\dagger a} = ae^{-i\omega t}$ und $e^{i\omega t a^\dagger a}a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t}$ und benutzen dann die Relation (25-a-iv) und entwickeln die Exponentialfunktionen in Taylor-Reihen:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}\sum_m \frac{(-\alpha^* a)^m}{m!} \tag{5}$$

Da $e^{i\omega t a^\dagger a} e^{-i\omega t a^\dagger a} = 1$, können wir dies zwischen allen Operatoren einfügen. Zum Beispiel haben wir $e^{i\omega t a^\dagger a} a^n e^{-i\omega t a^\dagger a} = e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{i\omega t a^\dagger a} a^{n-1} e^{-i\omega t a^\dagger a} = \ldots = \left(a e^{-i\omega t}\right)^n$. Dadurch haben wir:

$$e^{i\omega t a^\dagger a} D(\alpha) e^{-i\omega t a^\dagger a} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha e^{i\omega t} a^\dagger)^n}{n!} \sum_m \frac{(-\alpha^* e^{-i\omega t} a)^m}{m!} = D(\alpha e^{i\omega t}) \tag{6}$$

Notieren Sie, dass es auf die gleiche Art möglich ist zu zeigen, dass für eine beliebige Funktion[1] $f(a^\dagger, a)$ gilt dass $e^{i\omega t a^\dagger a} f(a^\dagger, a) e^{-i\omega t a^\dagger a} = f(a^\dagger e^{i\omega t}, a e^{-i\omega t})$.

b) $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$.

Um die Linearkombination zu finden benutzt man am besten die Umschreibung (25-a-iv): $D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}$ und entwickelt die Exponentialfunktionen mit den Operatoren in Taylor-Reihen:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \sum_m \frac{(-\alpha^* a)^m}{m!} |0\rangle \tag{7}$$

Da wir für den Grundzustand haben dass $a^m|0\rangle = 0$ ausser für $m = 0$, ist die Summe über m trivial und übrig bleibt nur die Summe über n. Wir benutzen $(a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$ und erhalten somit:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{8}$$

i) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, und $\langle n\rangle \equiv \langle\alpha|n|\alpha\rangle = |\alpha|^2$.

Wenden wir den Operator a auf den Kohärenten Zustand an, haben wir

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

wobei die letzte Gleichung durch einen Tausch der Summations-Variabel erreicht wurde. Der Erwartungswert von $n = a^\dagger a$ können wir dann herausbekommen in dem wir einsehen dass für den dualen Vektor $\langle\alpha|$ gilt, dass $\langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$ und wir folglich haben, dass

$$\langle n\rangle = \left(\langle\alpha|a^\dagger\right)\left(a|\alpha\rangle\right) = |\alpha|^2\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \tag{10}$$

Wobei wir benutzt haben dass $\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1$

ii) $P_{|\alpha\rangle}(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!}$.

Einfach das Skalarprodukt direkt nehmen:

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{11}$$

Multiplizieren wir mit dem Komplexkonjugat und benutzen die Eigenschaft (25-b-i) bekommen wir dann die gesuchte Eigenschaft.

[1] Mit einer wohldefinierten Taylor-Reihe

iii) $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, wobei $x = N_x(a + a^\dagger)$ und $p = N_p i(a^\dagger - a)$ mit $N_x = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ und $N_p = \sqrt{m\hbar\omega/2}$.

Schreiben wir erst alles auf die Auf- und Absteige-Operatoren um:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = N_x\sqrt{\langle (a^\dagger + a)^2\rangle - \langle (a^\dagger + a)\rangle^2} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = N_p\sqrt{\langle i^2(a^\dagger - a)^2\rangle - \langle i(a^\dagger - a)\rangle^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\langle (a^\dagger + a)\rangle &= \langle\alpha|(a^\dagger + a)|\alpha\rangle = \alpha^* + \alpha = 2\mathrm{Re}\alpha \\
\langle i(a^\dagger - a)\rangle &= \langle\alpha|i(a^\dagger - a)|\alpha\rangle = i(\alpha^* - \alpha) = 2\mathrm{Im}\alpha
\end{aligned} \tag{13}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|(a^\dagger + a)^2|\alpha\rangle &= \langle\alpha|(a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + \underbrace{aa^\dagger}_{1+a^\dagger a} + aa)|\alpha\rangle \\
&= (\alpha^*)^2 + 1 + 2|\alpha|^2 + (\alpha)^2 = (\alpha^* + \alpha)^2 + 1 \\
&= 4(\mathrm{Re}\alpha)^2 + 1
\end{aligned} \tag{14}$$

Auf die gleiche Art haben wir

$$\langle\alpha|i^2(a^\dagger - a)^2|\alpha\rangle = -(\alpha^*)^2 + 1 + 2|\alpha|^2 - (\alpha)^2 = 4(\mathrm{Im}\alpha)^2 + 1 \tag{15}$$

Somit erhalten wir letztendlich

$$\Delta x = N_x, \quad \Delta p = N_p \quad \Rightarrow \Delta x\Delta p = N_x N_p = \frac{\hbar}{2} \tag{16}$$

26. Reduzierte Dichtematrix

a)

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+-\rangle - |-+\rangle\Big) \\
\Rightarrow \hat{\rho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| =& \frac{1}{2}\Big(|+-\rangle - |-+\rangle\Big)\Big(\langle+-| - \langle-+|\Big) \\
=& \frac{1}{2}\Big(|+-\rangle\langle+-| - |+-\rangle\langle-+| - |-+\rangle\langle+-| + |-+\rangle\langle-+|\Big)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

In der Matrix-Darstellung (Basis $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$) haben wir

$$
\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{++,++} & \rho_{++,+-} & \rho_{++,-+} & \rho_{++,--} \\ \rho_{+-,++} & \rho_{+-,+-} & \rho_{+-,-+} & \rho_{+-,--} \\ \rho_{-+,++} & \rho_{-+,+-} & \rho_{-+,-+} & \rho_{-+,--} \\ \rho_{--,++} & \rho_{--,+-} & \rho_{--,-+} & \rho_{--,--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\tag{18}
$$

Der Zustand ist rein da $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

b) Da nur die Matrixelemente $\rho_{+-,+-} = 1/2$, $\rho_{+-,-+} = -1/2$, $\rho_{-+,+-} = -1/2$ und $\rho_{-+,-+} = 1/2$ ungleich 0 sind, und davon nur $\rho_{+-,+-}$ und $\rho_{-+,-+}$ die selben Indizes für das zweite Spin haben ($\sigma_2 = \sigma_2'$), ergiebt die Spur über das zweite Spin die reduzierte Dichtematrix $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1'\sigma_2}$ explizit

$$
\begin{aligned}
\rho^{\text{red}}_{+,+} &= \rho_{+-,+-} = \frac{1}{2} \\
\rho^{\text{red}}_{+-} &= 0 \\
\rho^{\text{red}}_{-+} &= 0 \\
\rho^{\text{red}}_{--} &= \rho_{-+,-+} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rho}^{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\tag{19}
$$

Das dieser Zustand nicht rein ist sieht man durch

$$
\left(\hat{\rho}^{\text{red}}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \hat{\rho}^{\text{red}}
\tag{20}
$$

27. Dichtematrix im Thermischen Gleichgewicht

Der Hamilton-Operator ist gegeben durch $\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a$. Für die Dichtematrix haben wir dann:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hbar\omega a^\dagger a} \tag{21}$$

Da $|n\rangle$ Eigenzustände von $a^\dagger a$ sind, ist die Dichtematrix in dieser Basis diagonal, d.h.

$$\rho_{nn'} = \langle n|\hat{\rho}|n'\rangle = \delta_{nn'} \frac{e^{-\beta\hbar\omega n}}{Z} \tag{22}$$

mit der Normalisierungs-Konstante:

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta\hbar\omega a^\dagger a}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \tag{23}$$

wobei wir die geometrische Summe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$ benutzt haben.

Der Mittlewert ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle n\rangle = \mathrm{Tr}(n\hat{\rho}) = \frac{1}{Z}\sum_n n e^{-\beta\hbar\omega n} &= \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial a}\sum_n e^{-an}\right)_{a=\beta\hbar\omega} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{1-e^{-a}}\right)_{a=\beta\hbar\omega} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^2} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \end{aligned} \tag{24}$$

28. Bewegungsgleichung der Dichtematrix im Jaynes-Cummings-Model

Die Liouville-Gleichung:

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{1}{i\hbar}\left([H, \hat{\rho}] = H\hat{\rho} - \hat{\rho}H\right) \tag{25}$$

Nehmen wir das Matrixelement $\langle \sigma n| \dots |\sigma' n'\rangle$ von dieser Gleichung haben wir:

$$\dot{\rho}_{(\sigma n),(\sigma' n')} = \frac{1}{i\hbar}\left(\langle \sigma n|H\hat{\rho}|n'\sigma'\rangle - \langle \sigma n|\hat{\rho}H|\sigma' n'\rangle\right) \tag{26}$$

und stecken $\hat{1} = \sum_{\tilde{n}\tilde{\sigma}} |\tilde{\sigma}\tilde{n}\rangle\langle\tilde{\sigma}\tilde{n}|$ zwischen $\hat{\rho}$ und H:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{(\sigma n),(\sigma' n')} &= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\tilde{n}\tilde{\sigma}}\left(\langle \sigma n|H|\tilde{\sigma}\tilde{n}\rangle\langle\tilde{\sigma}\tilde{n}|\hat{\rho}|n'\sigma'\rangle - \langle \sigma n|\hat{\rho}|\tilde{\sigma}\tilde{n}\rangle\langle\tilde{\sigma}\tilde{n}|H|\sigma' n'\rangle\right)\\ &= \frac{1}{i\hbar}\sum_{(\tilde{\sigma}\tilde{n})}\left(H_{(\sigma n),(\tilde{\sigma}\tilde{n})}\rho_{(\tilde{\sigma}\tilde{n}),(\sigma' n')} - \rho_{(\sigma n),(\tilde{\sigma}\tilde{n})}H_{(\tilde{\sigma}\tilde{n}),(\sigma n)}\right)\end{aligned} \tag{27}$$

Die Matrixelemente sind:

$$\begin{aligned}\langle +, n|\hat{H}|+, n'\rangle &= \delta_{n,n'}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\omega n\right)\\ \langle +, n|\hat{H}|-, n'\rangle &= \delta_{n,n'-1}\hbar g\sqrt{n'}\\ \langle -, n|\hat{H}|+, n'\rangle &= \delta_{n,n'+1}\hbar g\sqrt{n'+1}\\ \langle -, n|\hat{H}|-, n'\rangle &= \delta_{n,n'}\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\omega n\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Schreiben wir dann die Bewegungsgleichungen für die Matrixelemente mit verschiedenen Spin-Indizes einzeln auf und summieren über die Variablen $\tilde{\sigma}, \tilde{n}$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}i\dot{\rho}_{(+n),(+n')} &= \omega(n-n')\rho_{(+n),(+n')} + g\sqrt{n+1}\rho_{(-,n+1),(+,n')} - g\sqrt{n'+1}\rho_{(+,n),(-,n'+1)}\\ i\dot{\rho}_{(+n),(-n')} &= \left(\omega_0 + \omega(n-n')\right)\rho_{(+,n),(-,n')} + g\sqrt{n+1}\rho_{(-,n+1),(-,n')} - g\sqrt{n'}\rho_{(+,n),(+,n'-1)}\\ i\dot{\rho}_{(-n),(+n')} &= -\left(\omega_0 - \omega(n-n')\right)\rho_{(-,n),(+,n')} + g\sqrt{n}\rho_{(+,n-1),(+,n')} - g\sqrt{n'+1}\rho_{(-,n),(-,n'+1)}\\ i\dot{\rho}_{(-n),(-n')} &= \omega(n-n')\rho_{(-n),(-n')} + g\sqrt{n}\rho_{(+,n-1),(-,n')} - g\sqrt{n'}\rho_{(-,n),(+,n'-1)}\end{aligned} \tag{29}$$

Randbemerkung Es ist besser direkt in dem Wechselwirkungsbild zu arbeiten. Für die Elemente der Dichtematrix haben wir $\rho^I_{(\sigma n),(\sigma' n')} = \rho_{(\sigma n),(\sigma' n')}e^{i\frac{\omega_0}{2}(\sigma-\sigma')t}e^{i\omega(n-n')t}$ und die Bewegungsgleichungen werden dann einfacher:

$$\begin{aligned}i\dot{\rho}^I_{(+n),(+n')} &= g\left(\sqrt{n+1}\rho_{(-,n+1),(+,n')} - \sqrt{n'+1}\rho_{(+,n),(-,n'+1)}\right)\\ i\dot{\rho}^I_{(+n),(-n')} &= g\left(\sqrt{n+1}\rho_{(-,n+1),(-,n')} - \sqrt{n'}\rho_{(+,n),(+,n'-1)}\right)\\ i\dot{\rho}^I_{(-n),(+n')} &= g\left(\sqrt{n}\rho_{(+,n-1),(+,n')} - \sqrt{n'+1}\rho_{(-,n),(-,n'+1)}\right)\\ i\dot{\rho}^I_{(-n),(-n')} &= g\left(\sqrt{n}\rho_{(+,n-1),(-,n')} - \sqrt{n'}\rho_{(-,n),(+,n'-1)}\right)\end{aligned} \tag{30}$$