Lösung Blatt 7

20.12.2011

Aufgabe 22

Ein Atom im Strahlungsfeld wird beschrieben durch den Hamilton-Operator,

$$H = H_0 + H_1 \ , \ H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a \ , \ H_1 = \hbar g \sigma_x (a^\dagger + a) \, . \tag{1}$$

Teilaufgabe a)

Die Zustände $|+\rangle|n\rangle$ und $|-\rangle|n+1\rangle$ sind entartet. In diesem Entartete Unterraum kann der Hamilton-Operator H geschrieben werden als,

$$H = \hbar\omega(n+1/2)\mathbf{1} + \hbar g\sqrt{n+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diesen Typ von Hamiltonian haben wir schon mehrfach diagonalisiert. D.h. die Eigenzustände sind gegeben durch,

$$|\downarrow, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|n\rangle - |-\rangle|n+1\rangle) \, , \tag{3}$$

$$|\uparrow, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|n\rangle + |-\rangle|n+1\rangle) \tag{4}$$

und die Energien,

$$E_{\uparrow,n} = \hbar\omega(n+1/2)\mathbf{1} + \hbar g\sqrt{n+1} \ \ , \ E_{\downarrow,n} = \hbar\omega(n+1/2)\mathbf{1} - \hbar g\sqrt{n+1} \tag{5}$$

Teilaufgabe b)

Zuerst schauen wir uns einige Matrixelemente an.

$$\begin{aligned}
\langle\downarrow, n'|H_1|\downarrow, n\rangle &= \frac{1}{2}(\langle +|\langle n'| - \langle -|\langle n'+1|)H_1(|+\rangle|n\rangle - |-\rangle|n+1\rangle) \qquad (6)\\
&= \frac{\hbar g}{2}(\langle +|\langle n'| - \langle -|\langle n'+1|) \\
&\quad \big(|-\rangle(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle) - |+\rangle(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle)\big) \\
&= -\frac{\hbar g}{2}(\langle n'|(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle) + \langle n'+1|(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)) \\
&= -\frac{\hbar g}{2}(2\sqrt{n+1}\delta_{nn'} + \sqrt{n+2}\delta_{n'n+2} + \sqrt{n}\delta_{n'+1n-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\uparrow, n'|H_1|\uparrow, n\rangle &= \frac{1}{2}(\langle +|\langle n'| + \langle -|\langle n'+1|)H_1(|+\rangle|n\rangle + |-\rangle|n+1\rangle) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(\langle +|\langle n'| + \langle -|\langle n'+1|) \\
&\quad \big(|-\rangle(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle) + |+\rangle(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle)\big) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(\langle n'|(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle) + \langle n'+1|(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(2\sqrt{n+1}\delta_{nn'} + \sqrt{n+2}\delta_{n'n+2} + \sqrt{n}\delta_{n'+1n-1})
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\uparrow, n'|H_1|\downarrow, n\rangle &= \frac{1}{2}(\langle +|\langle n'| + \langle -|\langle n'+1|)H_1(|+\rangle|n\rangle - |-\rangle|n+1\rangle) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(\langle +|\langle n'| + \langle -|\langle n'+1|) \\
&\quad \big(|-\rangle(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle) - |+\rangle(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle)\big) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(-\langle n'|(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle) + \langle n'+1|(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)) \\
&= \frac{\hbar g}{2}(-\sqrt{n+2}\delta_{n'n+2} + \sqrt{n}\delta_{n'+1n-1})
\end{aligned} \tag{8}
$$

In entartet Störtheorie ist die Korrektur erster Ordnung zu einem Eigenzustand $|E_n^{(0)}\rangle$ mit der Energie $E_n^{(0)}$ definiert durch,

$$
\langle E_m^{(0)}|E_n^{(1)}\rangle = \frac{\langle E_m^{(0)}|H_1|E_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{9}
$$

Hierbei werden selbstverständlich die Zustände gewählt für die gilt, $\langle E_m^{(0)}|H_1|E_n^{(0)}\rangle \propto \delta_{nm}$. Damit lässt sich der Zustand auch schreiben als,

$$
|E_n\rangle = |E_n^{(0)}\rangle + \sum_{n\neq m} \frac{\langle E_m^{(0)}|H_1|E_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|E_m^0\rangle \tag{10}
$$

Damit ergeben sich die Zustände in erster Ordnung Störungstheorie,

$$
\begin{aligned}
|\uparrow, n\rangle &= |\uparrow, n\rangle + \frac{g}{4\omega}\left[\sqrt{n}|\uparrow, n-2\rangle - \sqrt{n+2}|\uparrow, n+2\rangle + \sqrt{n}|\downarrow, n-2\rangle - \sqrt{n+2}|\downarrow, n+2\rangle\right] \\
|\downarrow, n\rangle &= |\downarrow, n\rangle + \frac{g}{4\omega}\left[\sqrt{n}|\downarrow, n-2\rangle - \sqrt{n+2}|\downarrow, n+2\rangle + \sqrt{n}|\uparrow, n-2\rangle - \sqrt{n+2}|\uparrow, n+2\rangle\right]
\end{aligned} \tag{11}
$$

Nebenbemerkung: Im Prinzip ist das Ergebnis 11 nicht ganz vollständig. In der nächsten Ordnung Störtheorie gibt es Elemente mit der Form,

$$
\frac{\langle\downarrow, n|H_1|\uparrow, n+2\rangle\langle\uparrow, n+2|H_1|\uparrow, n\rangle}{(E_{\uparrow,n} - E_{\uparrow,n+2})(E_{\uparrow,n} - E_{\downarrow,n})} \approx \frac{g\sqrt{n+2}}{4\omega}\frac{g\sqrt{n+2}}{2g\sqrt{n+1}} \propto \frac{g}{\omega} \tag{12}
$$

Diese Terme sollten eigentlich auch berücksichtigt werden.

Aufgabe 23

Teilaufgabe a)

Wir schränken uns zuerst auf eine Mode ein:

Wir haben

$$e^{iH_0t/\hbar} = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{i\frac{\omega_0}{2} t\sigma_z} = e^{i\omega t a^\dagger a} \left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{eg}}{2}t\right) \right\} \tag{13}$$

und

$$e^{-iH_0t/\hbar} = e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{-i\frac{\omega_0}{2} t\sigma_z} = e^{-i\omega t a^\dagger a} \left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_{eg}}{2}t\right) \right\}. \tag{14}$$

Weiter ist

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega t)^n}{n!} (a^\dagger a)^n a^\dagger = a^\dagger e^{i\omega t a a^\dagger} = a^\dagger e^{i\omega t (a^\dagger a + 1)} \tag{15}$$

und

$$a e^{-i\omega t a^\dagger a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} a (a^\dagger a)^n = e^{-i\omega t a a^\dagger} a = e^{-i\omega t (a^\dagger a + 1)} a, \tag{16}$$

also

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t} \qquad e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a} = a e^{-i\omega t}$$

Wir bekommen unter Verwendung von $\sigma_z \sigma_\pm = \pm\sigma_\pm$

$$\left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \right\} \sigma_+ \left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \right\} = e^{i\omega_0 t}\sigma_+$$

$$\left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \right\} \sigma_- \left\{ \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \right\} = e^{-i\omega_0 t}\sigma_-$$

und erhalten

$$H_1(t) = \hbar g (\sigma_+ a e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega)t}).$$

Mit diesem Resultat und unter Verwendung von

$$[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'},$$

erhalten wir durch analoge Rechnung,

$$H_1'(t) = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} e^{i(\omega_0 - \omega_{\vec{k}})t} + \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} e^{-i(\omega_0 - \omega_{\vec{k}})t}).$$

Teilaufgabe b)

Wir beginnen mit dem relevanten Matrixelement:

$$\frac{1}{\hbar}|\int_{t_0}^{t} d\tau \langle g, \{n'_{\vec{k}}\}|H_1(\tau)|e, \{n_{\vec{k}}\}\rangle| = |\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n'_{\vec{k}}\}|\sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|e, \{n_{\vec{k}}\}\rangle \int_{t_0}^{t} d\tau e^{-i(\omega_{eq}-\omega_{\vec{k}})\tau}| \tag{17}$$

$$= |\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n'_{\vec{k}}\}|\sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|e, \{n_{\vec{k}}\}\rangle \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t-t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} e^{i\delta\omega_{\vec{k}}(t+t_0)/2}|$$

mit $\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} - \omega_0$.

Wenn wir quadrieren und den Limes $t \to \infty$ bilden stellen wir nun fest,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}'}(t-t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}'}/2} \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t-t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} = 2\pi t \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta(\delta\omega_{\vec{k}'}) \tag{18}$$

Damit ergibt sich die Rate,

$$\Gamma_{\substack{e\to g \\ n'\to n}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |\langle g, \{n'_{\vec{k}}\}|\hbar g_{\vec{k}} \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|e, \{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2 \delta(\omega_{eg} - \omega_{\vec{k}}) \tag{19}$$

und genauso

$$\Gamma_{\substack{g\to e \\ n'\to n}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |\langle e, \{n'_{\vec{k}}\}|\hbar g_{\vec{k}} \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|g, \{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2 \delta(\omega_{eg} - \omega_{\vec{k}}) \tag{20}$$

Wir erhalten die Matrixelemente

$$|\langle g, n'_{\vec{k}}|\sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|e, n_{\vec{k}}\rangle|^2 = (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta_{n'_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}-1} \tag{21}$$

$$|\langle e, n'_{\vec{k}}|\sigma_+ a_{\vec{k}}|g, n_{\vec{k}}\rangle|^2 = n_{\vec{k}} \cdot \delta_{n'_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}-1} \tag{22}$$

Damit wird für die Photonen-Emission

$$\Gamma_{e\to g} = \sum_{n'} \Gamma_{\substack{e\to g \\ n\to n'}} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{eg}) \tag{23}$$

wobei die 1 der spontanen Emission und $n_{\vec{k}}$ der stimulierten Emission entspricht, und für die Photonen-Absorption

$$\Gamma_{g\to e} = \sum_{n'} \Gamma_{\substack{g\to e \\ n\to n'}} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} \cdot n_{\vec{k}} \cdot \delta(\omega_{eg} - \omega_{\vec{k}}).$$

Wir können noch $\sum_{\vec{k}} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = V \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 d\Omega_{\vec{k}}$ schreiben, und $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}| = \omega_0$ verwenden, um auf

$$\Gamma_{\substack{e\to g \\ n\to n'}} = \frac{\omega^2_{eg} V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}}\, g^2_{\vec{k}} \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \tag{24}$$

$$\Gamma_{\substack{g\to e \\ n\to n'}} = \frac{\omega^2_{eg} V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}}\, g^2_{\vec{k}} \cdot n_{\vec{k}} \tag{25}$$

zu kommen, wobei noch Winkelintegrale übrigbleiben, die eine anisotrope Verteilung der Strahlung erlauben. Der Betrag $|\vec{k}|$ ist auf ω_0/c festgelegt.

Aufgabe 24

Teilaufgabe a)

Gegeben ist,

$$q_n = \frac{1}{(mN)^{1/2}} \sum_k e^{ikan} Q_k \quad , \quad p_n = \left(\frac{m}{N}\right)^{1/2} \sum_k e^{-ikan} P_k \tag{26}$$

Damit gilt,

$$\begin{aligned} Q_k &= \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_n e^{-ikan} q_n \\ P_k &= \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_n e^{ikan} p_n \end{aligned} \tag{27}$$

Der Kommutator kann also geschrieben werden als,

$$\begin{aligned} [Q_k, P_k'] &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_n{}' e^{-ikan} e^{ik'an'} [q_n, p_n'] \\ &= i\hbar \frac{1}{N} \sum_n e^{i(k'-k)an} = i\hbar \delta_{kk'} \end{aligned} \tag{28}$$

Teilaufgabe b)

Wir Transformieren die Terme des Hamitlon-Operators Stück für Stück,

$$\begin{aligned} \sum_n p_n^2 &= \frac{m}{N} \sum_k \sum_{k'} \sum_n e^{i(k+k')an} P_k P_{k'} \\ &= m \sum_k \sum_{k'} P_k P_{k'} \delta_{-k'k} = m \sum_k P_k P_{-k} \, . \end{aligned} \tag{29}$$

Genauso gilt auch,

$$\sum_n q_n^2 = \frac{1}{m} \sum Q_k Q_{-k} \, .$$

Nun der Kopplungsterm,

$$\begin{aligned} \sum_n (q_n - q_{n-1})^2 &= \frac{1}{mN} \sum_k \sum_{k'} \sum_n (e^{-ikan} - e^{-ika(n-1)}) Q_k (e^{-ik'an} - e^{-ik'a(n-1)}) Q_k' \\ &= \frac{1}{mN} \sum_k \sum_{k'} \sum_n e^{-ikan} (1 - e^{ika}) Q_k e^{-ik'an} (1 - e^{ik'a}) Q_k' \\ &= \frac{1}{m} \sum_k (1 - e^{ika}) Q_k (1 - e^{-ika}) Q_{-k} = \frac{1}{m} \sum_k (2\sin(ka/2))^2 Q_k Q_{-k} \, . \end{aligned}$$

Da p_n und q_n hermitesch sind folgt $P_k^\dagger = P_{-k}$ und $Q_k^\dagger = Q_{-k}$. Damit ergibt sich der Hamilton-Operator,

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger \right] \, , \tag{30}$$

mit $\omega_k^2 = \Omega^2 \left[2\sin(ka/2)\right]^2 + \Omega_0^2 \, .$