Lösung Blatt 6

December 6, 2011

Aufgabe 18

Der Hamilton Operator ist,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \alpha_R \left[\sigma_x p_y - \sigma_y p_x \right] . \tag{1}$$

Um das Problem zu vereinfachen transformiere ich die Pauli-Matrizen in die Basis der Eigenzustände von σ_y. σ_y hat die Eigenwerte 1 und -1 und die Eigenzustände $|+\rangle$, $|-\rangle$. In dieser Basis können wir den Hamiltonian schreiben als,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \alpha_R \left[\tau_y p_y - \tau_z p_x \right] . \tag{2}$$

mit

$$\tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;,\; \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Dies sind offensichtlich gerade wieder die Pauli-Matrizen.

Teilaufgabe a)

In dieser Aufgabe setzen wir $p_y = 0$. In x-Richtung setzen wir Ebene wellen an, $e^{ip_x x/\hbar}$, mit dem Impuls p_x. Der Hamiltonian ist diagonal d.h. Energien lassen sich direkt ablesen,

$$E_+ = \frac{p_{x+}^2}{2m} - \alpha_R p_{x+} \,,\, E_- = \frac{p_{x-}^2}{2m} + \alpha_R p_{x-} . \tag{4}$$

Wir sehen das $E_+ = E_-$ gilt für $p_{x+} - p_{x-} = 2m\alpha_R$ (dran denken: wir haben negative Impulse ausgeschlossen). Dies ist die 2-fache Entartung.

Nun konstruieren wir einen Zustand für den gilt $\langle \sigma_x \rangle = 1$, bzw. $\langle \tau_y \rangle = 1$. Die Eigenzustände von τ_y sind gegeben durch,

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i|+\rangle + |-\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[i|+\rangle - |-\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit den Eigenwerten 1 und -1. D.h. der entsprechende Zustand ($\langle\tau_y\rangle = 1$) ist gegeben durch,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[ie^{ip_{x+}x/\hbar}|+\rangle - e^{ip_{x-}x/\hbar}|-\rangle\right] \tag{7}$$

mit $E = \frac{p_{x+}^2}{2m} - \alpha_R p_{x+}$ und $p_{x+} - 2m\alpha_R = p_{x-}$. Damit lässt sich der Zustand auch schreiben als,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(p_{x+}-m\alpha_R)x/\hbar}\left[ie^{im\alpha_R x/\hbar}|+\rangle - e^{-im\alpha_R x/\hbar}|-\rangle\right], \qquad (8)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(p_{x+}-m\alpha_R)x/\hbar}\left[\cos(m\alpha_R x/\hbar)\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(m\alpha_R x/\hbar)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

Wenn wir nun an der Stelle $x = L$ den Operator σ_x bzw. $-\tau_y$ messen ergibt sich der Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\cos^2(m\alpha_R L/\hbar)$ und der Wert -1 mit der Wahrscheinlichkeit $\sin^2(m\alpha_R L/\hbar)$. Wie in der Aufgabenstellung gefordert hängen diese Wahrscheinlichkeiten nur von m, α_R und L ab.

Teilaufgabe b)

Nun versuchen wir die Eigenzustände des vollständigen Hamilton-Operators zu finden. Wir schreiben den Hamilton-Operator in der Form,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} - \alpha_R p_x & i\alpha_R p_y \\ -i\alpha_R p_y & \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \alpha_R p_x \end{pmatrix} \tag{9}$$

Das schreiben wir wiederum um in,

$$H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m}\mathbf{1} + \alpha_R\sqrt{p_x^2+p_y^2}\begin{pmatrix} -\cos(\theta) & i\sin(\theta) \\ -i\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{10}$$

mit $\tan\theta = p_y/p_x$. Dies lässt sich nun relativ einfach diagonalisieren und wir bekommen die Eigenenergien,

$$E_+ = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \alpha_R\sqrt{p_x^2+p_y^2}\ ,\ \ E_- = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} - \alpha_R\sqrt{p_x^2+p_y^2} \tag{11}$$

und die Zustände,

$$|E_+\rangle = e^{ip_x x/\hbar}e^{ip_y y/\hbar}\begin{pmatrix} i\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix}\ ,\ \ |E_-\rangle = e^{ip_x x/\hbar}e^{ip_y y/\hbar}\begin{pmatrix} i\cos\theta/2 \\ -\sin\theta/2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Im Limes $p_y \gg p_x$ erhalten wir $\theta = \pi/2$ und damit,

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ip_x x/\hbar}e^{ip_y y/\hbar}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \ |E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ip_x x/\hbar}e^{ip_y y/\hbar}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Wenn wir nun einen Zustand bilden für den gilt $\langle\tau_y\rangle = 1$ bei $x = 0$, dann ist dies einfach $|E_-\rangle$. Ofensichtlich gilt dann für alle x und y, $\langle\tau_y\rangle = 1$ und damit $\langle\sigma_x\rangle = 1$.

Aufgabe 19

Der Hamilton-Operator ist,

$$H_{SB} = \lambda(\vec{L}\cdot\vec{S}) \tag{14}$$

a)

$$\begin{aligned}
[H_{SB}, L_i] &= \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_jS_j, L_i] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_j, L_i]S_j = \sum_{j=1}^{3}\lambda\sum_k \epsilon_{jik}\lambda L_k S_j i\hbar \\
&= i\hbar\lambda\sum_{jk}\epsilon_{kji}L_kS_j = i\hbar\lambda(\vec{L}\times\vec{S})_i \\
\Rightarrow &\quad [H_{SB}, \vec{L}] = i\hbar\lambda(\vec{L}\times\vec{S}) \qquad (15)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
[H_{SB}, S_i] &= \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_jS_j, S_i] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[S_j, S_i]L_j = i\hbar\lambda(\vec{S}\times\vec{L})_i \\
\Rightarrow &\quad [H_{SB}, \vec{L}] = i\hbar\lambda(\vec{S}\times\vec{L}) \qquad (16)
\end{aligned}$$

c)

$$[H_{SB}, \vec{L}^2] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_jS_j, \vec{L}^2] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_j, \vec{L}^2]S_j = 0 \tag{17}$$

d)

$$[H_{SB}, \vec{S}^2] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[L_jS_j, \vec{S}^2] = \sum_{j=1}^{3}\lambda[S_j, \vec{S}^2]L_j = 0 \tag{18}$$

Aus a) und b) folgt sofort,

$$[H_{S_B}, J_i] = 0 \;\Rightarrow\; [H_{S_B}, \vec{J}] = 0\,. \tag{19}$$

Aus c) und d) und der tatsache das $\vec{L}\cdot\vec{S}$ mit sich selbst vertauscht folgt,

$$[H_{S_B}, \vec{J}^2] = 0 \;\Rightarrow\; [H_{S_B}, \vec{J}^2] = 0\,. \tag{20}$$

Aufgabe 20

Der Hamilton-Operator ist

$$H = \frac{\hbar}{2}(\omega_0 + X)\sigma_z\,, \tag{21}$$

und zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Zustand präperiert in,

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right] . \tag{22}$$

Damit ergibt sich die Zeitenwicklung,

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i(\omega_0+X)t/2}|+\rangle + e^{-i(\omega_0+X)t/2}|-\rangle\right] , \tag{23}$$

und daraus der Erwartungswert,

$$\langle\sigma_x(t)\rangle = \cos\left[(\omega_0 + X)t\right] . \tag{24}$$

Wenn wir nun úber X mitteln ergibt sich,

$$\langle\langle\sigma_x(t)\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dX P(X)\cos\left[(\omega_0+X)t\right] = e^{-(1/4)W^2t^2}\cos(\omega t) . \tag{25}$$

Aufgabe 21

Teilaufgabe a)

Es können folgende zustände bei Bob ankommen,

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle + \beta|+++\rangle) \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+--\rangle + \beta|-++\rangle) \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-+-\rangle + \beta|+-+\rangle) \\
|\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|--+\rangle + \beta|++-\rangle)
\end{aligned}$$

Nun wenden wir darauf den operator $\sigma_{z1}\otimes\sigma_{z2}\otimes\mathbf{1}$ an:

$$\sigma_{z1}\otimes\sigma_{z2}\otimes\mathbf{1}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle + \beta|+++\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle + \beta|+++\rangle \tag{26}$$

$$\sigma_{z1}\otimes\sigma_{z2}\otimes\mathbf{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+--\rangle + \beta|-++\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+--\rangle + \beta|-++\rangle \tag{27}$$

$$\sigma_{z1}\otimes\sigma_{z2}\otimes\mathbf{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-+-\rangle + \beta|+-+\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-+-\rangle + \beta|+-+\rangle \tag{28}$$

$$\sigma_{z1}\otimes\sigma_{z2}\otimes\mathbf{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|--+\rangle + \beta|++-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|--+\rangle + \beta|++-\rangle \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

D.h. $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_4\rangle$ sind Eigenzustände mit dem Eigenwert 1 und $|\psi_2\rangle$ und $|\psi_3\rangle$ sind Eigenzustände mit dem Eigenwert -1. Nun verwenden wir den anderen

Operator:

$$\begin{aligned}
\sigma_{z1}\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_{z3}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle+\beta|+++\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle+\beta|+++\rangle \\
\sigma_{z1}\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_{z3}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+--\rangle+\beta|-++\rangle) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+--\rangle+\beta|-++\rangle) \\
\sigma_{z1}\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_{z3}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-+-\rangle+\beta|+-+\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-+-\rangle+\beta|+-+\rangle) \\
\sigma_{z1}\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_{z3}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|--+\rangle+\beta|++-\rangle) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|--+\rangle+\beta|++-\rangle)
\end{aligned}$$

D.h. $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_3\rangle$ sind Eigenzustände mit dem Eigenwert 1 und $|\psi_2\rangle$ und $|\psi_4\rangle$ sind Eigenzustände mit dem Eigenwert -1.

Teilaufgabe b)

Aus den Messungen kann abgelesen werden welcher Bit geflipt wurde,

Messung 1	Messung 2	Zustand
1	1	$\|\psi_1\rangle$
-1	-1	$\|\psi_2\rangle$
-1	1	$\|\psi_3\rangle$
1	-1	$\|\psi_4\rangle$

(31)

Durch diese Messungen wissen wir welcher Qubit verändert wurde und können dies durch eine SWAP-Operation rückgängig machen.