Lösung Blatt 5

29.11.11

Aufgabe 14

Der Hamiltonian kann umgeschrieben werden in

$$\frac{J}{4}\left(\sigma_{x1}\sigma_{x2}+\sigma_{y1}\sigma_{y2}+\sigma_{z1}\sigma_{z2}\right) \tag{1}$$

In der Basis $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$ erzeugen nur die operatoren $\sigma_{x1}\sigma_{x2}+\sigma_{y1}\sigma_{y2}$ übergänge. $\sigma_{z1}\sigma_{z2}$. Ist diagonal in dieser Basis,

$$\sigma_{z1}\sigma_{z2}|{++}\rangle=|{++}\rangle\ ,\ \sigma_{z1}\sigma_{z2}|{--}\rangle=|{--}\rangle\ ,\ \sigma_{z1}\sigma_{z2}|{-+}\rangle=-|{-+}\rangle\ ,\ \sigma_{z1}\sigma_{z2}|{+-}\rangle=-|{+-}\rangle\,. \tag{2}$$

Desweiteren ergibt sich,

$$\langle -+|\sigma_{x1}\sigma_{x2}+\sigma_{y1}\sigma_{y2}|+-\rangle=2\quad,\quad\langle --|\sigma_{x1}\sigma_{x2}+\sigma_{y1}\sigma_{y2}|+-\rangle|++\rangle=0\,.$$

Damit kennen wir bereits die Eigenzustände $|++\rangle$ und $|--\rangle$ mit den Energies $E_{++}=E_{--}=J/4$.

Die Zustände $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ sind gekoppelt und entartet. Die Eigenzustände hierzu wurden bereits auf einem früheren Übungsblatt berechnet,

$$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+-\rangle+|-+\rangle\right] \tag{3}$$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+-\rangle-|-+\rangle\right] \tag{4}$$

mit den Energien, $E_S=-3J/4$ und $E_{T_0}=J/4$.

Aufgabe 15

Teilaufgabe a)

$$|+,+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad|+,-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad|-,+\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad|-,-\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$H=-\frac{J}{\hbar^2}\left(S_{+,1}S_{-,2}+S_{-,1}S_{+,2}\right). \tag{6}$$

Wir berechnen

$$S_{+,1} = S_{x,1}+iS_{y,1} = \hbar\Big[|+,+\rangle\langle -,+| + |+,-\rangle\langle -,-|\Big] = \hbar\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}(0,0,1,0) + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}(0,0,0,1)\right]. \tag{7}$$

Dies, und analoge Rechnung für die restlichen Matrizen führt auf

$$S_{+,1} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad S_{+,2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$S_{-,1} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad S_{-,2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Damit erhalten wir

$$H = -J\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Teilaufgabe b)

Wir entwickeln den Operator $U = e^{-iHt/\hbar}$ in eine Taylorreihe, und verwenden, dass

$$H^2 = J^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{11}$$

und somit

$$H^{2n} = J^{2n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad H^{2n+1} = -J^{2n+1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Damit können wir die Reihe wieder aufsummieren, und erhalten

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{J\tau}{\hbar} & i\sin\frac{J\tau}{\hbar} & 0\\ 0 & i\sin\frac{J\tau}{\hbar} & \cos\frac{J\tau}{\hbar} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & i\sin\gamma & 0\\ 0 & i\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Wir setzen $\gamma = \pi/2$ ein, was auf

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{14}$$

führt. Wir wenden dies auf einen Vektor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{15}$$

and und erhalten

$$\begin{pmatrix} a \\ ic \\ ib \\ d \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Das ist gerade bis auf Vorfaktoren i der ursprüngliche Spinvektor mit vertauschten Spin-Indizes.

Aufgabe 16

Ein allgemeine Rotationsmatrix für einen Spinvektor ist durch

$$U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin(\frac{\alpha}{2}) \tag{17}$$

gegeben, wobei wir eine Drehung um die Achse $\vec{n}$ um den Winkel α durchführen. Wenn wir für $\vec{n}$ die Polarwinkel $n_x = \cos(\theta)\cos(\phi)$, $n_y = \cos(\theta)\sin(\phi)$, $n_z = \sin(\theta)$ einführen, können wir dies auch als

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\gamma)e^{i\delta} & i\sin(\gamma)e^{-i\phi} \\ i\sin(\gamma)e^{i\phi} & \cos(\gamma)e^{-i\delta} \end{pmatrix} \tag{18}$$

mit $\cos(\gamma)e^{i\delta} = \cos(\frac{\alpha}{2}) + i\sin(\theta)\sin(\frac{\alpha}{2})$, $\sin(\gamma) = \cos(\theta)\sin(\frac{\alpha}{2})$ schreiben. Wir wenden nun dieselbe Drehung auf beide Spins eines Singulett-Zustands an. Wir schreiben für den Spin-Singulett-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{19}$$

und verwenden den Drehoperator $U \otimes U$. Wir erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} \cos(\gamma)e^{i\delta} \\ i\sin(\gamma)e^{i\phi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i\sin(\gamma)e^{-i\phi} \\ \cos(\gamma)e^{-i\delta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\sin(\gamma)e^{-i\phi} \\ \cos(\gamma)e^{-i\delta} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\gamma)e^{i\delta} \\ i\sin(\gamma)e^{i\phi} \end{pmatrix}\right\} \tag{20}$$

was wir als

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos(\gamma)e^{i\delta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\sin(\gamma)e^{i\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \otimes \left\{i\sin(\gamma)e^{-i\phi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(\gamma)e^{-i\delta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{i\sin(\gamma)e^{-i\phi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(\gamma)e^{-i\delta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \otimes \left\{\cos(\gamma)e^{i\delta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\sin(\gamma)e^{i\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

umschreiben können. Wir multiplizieren aus und erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{[\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - [\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{21}$$

was sich auf den ursprünglichen Singulett-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \tag{22}$$

reduziert. Das beweist die Rotationsinvarianz.

Aufgabe 17

Teilaufgabe a)

Da der Singulett-Zustand rotationsinvariant ist, können wir o.b.d.A. die z-Achse als die $\vec{a}$-Achse wählen und den Vektor $\vec{b}$ in die $x-z$-Ebene legen. Der polare Winkel zwischen beiden sei θ. Eine Messung von $A_{\vec{a}}$ an $\vec{a}$ gibt dann mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ jeweils die Werte 1 oder -1 (dasselbe gälte für $B_{\vec{b}}$, falls dies zuerst gemessen würde). Misst man den Wert 1, so ist der Zustand danach $|+\rangle\otimes|-\rangle$. Misst man den Wert -1, so ist der Zustand danach $-|-\rangle\otimes|+\rangle$. Wir rotieren nun den Spin des zweiten Teilchens um die y-Achse mit der Rotationsmatrix

$$U=e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y}=\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}))\\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix} \tag{23}$$

und führen die Eigenvektoren $|+\rangle_{\vec{b}}$ und $|-\rangle_{\vec{b}}$ bezüglich der Achse $\vec{b}$ ein. Das ergibt im ersten Falle $|+\rangle\otimes(-\sin(\frac{\theta}{2})|+\rangle_{\vec{b}}+\cos(\frac{\theta}{2})|-\rangle_{\vec{b}})$, und im zweiten Falle $-|-\rangle\otimes(\cos(\frac{\theta}{2})|+\rangle_{\vec{b}}+\sin(\frac{\theta}{2})|-\rangle_{\vec{b}})$.
Die kombinierte Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Tabelle

$A_{\vec{a}}$ \ $B_{\vec{b}}$	1	-1
1	$\frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta}{2})$	$\frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta}{2})$
-1	$\frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta}{2})$	$\frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta}{2})$

und sind $\sin^2(\frac{\theta}{2})$ für $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}=1$ und $\cos^2(\frac{\theta}{2})$ für $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}=-1$.
Wenn wir stattdessen zuerst $B_{\vec{b}}$ messen, dann erhalten wir dasselbe Ergebnis, mit $\theta\to-\theta$. Die Wahrscheinlichkeiten sind dann dieselben.
Wenn die Achsen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich sind, $\theta=0$, dann erhält man mit Sicherheit $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}=-1$. Sind die Achsen antiparallel, $\theta=\pi$, so erhält man mit Sicherheit $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}=1$. Stehen die Achsen senkrecht aufeinander, so ist die kombinierte Wahrscheinlichkeit für 1 und -1 gleich und $\frac{1}{2}$. In diesem Falle sind die Messergebnisse völlig unkorreliert.

Teilaufgabe b)

Der Erwartungswert für $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle S|(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\otimes(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|S\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle+|\otimes\langle-|-\langle-|\otimes\langle+|\Big)(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\otimes(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})\Big(|+\rangle\otimes|-\rangle-|-\rangle\otimes|+\rangle\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle+|\vec{a}\cdot\vec{\sigma}|+\rangle\otimes\langle-|\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|-\rangle-\langle+|\vec{a}\cdot\vec{\sigma}|-\rangle\otimes\langle-|\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|+\rangle\\ &\quad -\langle-|\vec{a}\cdot\vec{\sigma}|+\rangle\otimes\langle+|\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|-\rangle+\langle-|\vec{a}\cdot\vec{\sigma}|-\rangle\otimes\langle+|\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|+\rangle\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(-a_zb_z-(a_x-ia_y)(b_x+ib_y)-(a_x+ia_y)(b_x-ib_y)-a_zb_z\Big)\\ &= -\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned} \tag{24}$$

$$\langle S|(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\otimes(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|S\rangle = -\cos(\theta_{\vec{a}}-\theta_{\vec{b}}) \tag{25}$$

Damit wird

$$C^{|S\rangle} = -\cos(\theta_{\vec{a}}-\theta_{\vec{b}}) + \cos(\theta_{\vec{a}}-\theta_{\vec{b}'}) - \cos(\theta_{\vec{a}'}-\theta_{\vec{b}}) - \cos(\theta_{\vec{a}'}-\theta_{\vec{b}'}) \tag{26}$$

Wir wählen nun z.B. die Werte $\theta_{\vec{a}} = 0$, $\theta_{\vec{b}} = -3\pi/4$, $\theta_{\vec{a}'} = \pi/2$, $\theta_{\vec{b}'} = -\pi/4$ und erhalten $C^{|S\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2$.
Das Ergebnis zeigt, dass die Quantenmechanik inkonsistenz mit der Annahme von Lokalität und versteckten Variablen ist.