Lösung Blatt 4

22.11.11

Aufgabe 11

Teilaufgabe a)

Die Zeitentwicklung des Teilchens wird beschrieben durch die Schrödingergleichung,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle &= H(t)|\psi\rangle \quad , \quad \text{mit} \qquad (1) \\ H(t) &= -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R^{(0)}\left(\sigma_x \sin\omega t + \sigma_y \cos\omega t\right) \; . \end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt den Zeitabhängigen Teil des Hamilton-Operators um,

$$\begin{aligned} \sigma_x \sin\omega t + \sigma_y \cos\omega t &= -\sigma_x \cos(\omega t + \pi/2) + \sigma_y \sin(\omega t + \pi/2) \qquad (2) \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t+\pi/2) + i\sin(\omega t+\pi/2) \\ \cos(\omega t+\pi/2) - i\sin(\omega t+\pi/2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\left[\sigma_+ e^{i(\omega t+\pi/2)} + \sigma_- e^{-i(\omega t+\pi/2)}\right] \end{aligned}$$

Eine beliebige Zeitabhängige unitäre Transformation $U(t)$ ergibt die Schrödinger Gleichung,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left[U^\dagger(t)H(t)U(t) - i\hbar U^\dagger\frac{\partial}{\partial t}U\right]|\psi\rangle \, . \qquad (3)$$

Ich wähle

$$U(t) = e^{i\omega\sigma_z t/2} \, . \qquad (4)$$

Wir stellen fest,

$$\begin{aligned} \sigma_z\sigma_+ = \sigma_+ \quad &, \quad \sigma_+\sigma_z = -\sigma_+ \qquad (5) \\ \sigma_z\sigma_- = -\sigma_- \quad &, \quad \sigma_-\sigma_z = \sigma_- \, . \end{aligned}$$

Nun die Transformation,

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t\sigma_z/2}\sigma_+ e^{i\omega t\sigma_z/2} &= \sum_{n,m}(-1)^n\omega^n i^n\frac{1}{2^n}\sigma_z^n\sigma_+\omega^m i^m\frac{1}{2^m}\sigma_z^m \qquad (6) \\ &= \sum_{n,m}\omega^n i^n\frac{(-1)^n}{2^n}\sigma_+\omega^m i^m\frac{(-1)^m}{2^m} \\ &= \sigma_+ e^{-i\omega t} \, , \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
e^{-i\omega t\sigma_z/2}\sigma_- e^{i\omega t\sigma_z/2} &= \sum_{n,m}(-1)^n\omega^n i^n\frac{1}{2^n}\sigma_z^n\sigma_-\omega^m i^m\frac{1}{2^m}\sigma_z^m \qquad (7)\\
&= \sum_{n,m}\omega^n i^n\frac{1}{2^n}\sigma_-\omega^m i^m\frac{1}{2^m}\\
&= \sigma_- e^{i\omega t}\,.
\end{aligned}
$$

Und dann verwenden wir,

$$
-i\hbar U^\dagger\dot{U} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z\,. \qquad (8)
$$

Damit bekommen wir die Transformierte Schrödinger Gleichung mit,

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H'|\psi\rangle\ ,\ H' = -\frac{1}{2}\Omega_R^{(0)}\left[\sigma_+ e^{i\pi/2} + \sigma_- e^{-i\pi/2}\right] = \frac{\hbar}{2}\Omega_R^{(0)}\sigma_y\,. \qquad (9)
$$

Teilaufgabe b)

Das Spin-1/2 Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$
|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \qquad (10)
$$

Wie oben definiert ist $|\psi(t)\rangle$ die Wellenfunktion im rotierenden Bezugssystem, aber es gilt,

$$
|\psi(0)\rangle = U^\dagger(0)|\psi'(0)\rangle = |\psi'(0) rangle\,. \qquad (11)
$$

Wir berechnen nun die Zeitentwicklung von $|\psi(t)\rangle$ mit dem Hamilton-Operator $H'(t)$. Die Eigenwerte zur Pauli-Matrix σ_y sind $e_{y\uparrow} = 1$ und $e_{y\downarrow} = -1$, mit den Eigenvektoren,

$$
|e_{y\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ |e_{y\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\,. \qquad (12)
$$

In diesen Zuständen lässt sich der Initialzustand schreiben als,

$$
|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|e_{y\downarrow}\rangle - |e_{y\uparrow}\rangle\right] \qquad (13)
$$

Damit ergibt sich die Zeitentwicklung im rotierenden Bezugssystem,

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\Omega_R^{(0)}t/2}|e_{y\downarrow}\rangle - e^{-\Omega_R^{(0)}t/2}|e_{y\uparrow}\rangle\right] \qquad (14)\\
&= \frac{1}{2}\left[i(e^{\Omega_R^{(0)}t/2} + e^{-\Omega_R^{(0)}t/2})|\uparrow\rangle + (e^{\Omega_R^{(0)}t/2} - e^{-\Omega_R^{(0)}t/2})|\downarrow\rangle\right] \qquad (15)\\
&= i\left[\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)|\downarrow\rangle + \cos(\Omega_R^{(0)}t/2)|\uparrow\rangle\right]\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Was den Erwartungswert angeht sollte man feststellen, dass

$$
U^\dagger(t)\sigma_z U(t) = \sigma_z\,. \qquad (17)
$$

Damit ergibt sich als Erwartungswert für σ_z,

$$
\langle\sigma_z\rangle = \cos^2(\Omega_R^{(0)}t/2) - \sin^2(\Omega_R^{(0)}t/2) = \cos(\Omega_R^{(0)}t/2)\,. \qquad (18)
$$

Aufgabe 12

Der Zustand $|\psi\rangle$ ist zum Zeitpunkt t gegeben durch,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t/2}\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\omega_0 t/2}\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Teilaufgabe a)

Wir messen die Eigenwerte von σ_z. Da die Matrix von σ_z in unserer Darstellung bereits diagonal ist sehen wir sofort das die Eigenwerte gegeben sind durch $m_\uparrow = 1$ und $m_\downarrow = -1$ und die Eigenvektoren durch

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{20}$$

Da der Zustand in der Form dieser Eigenvektoren geschrieben ist können wir sofort sehen:

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	α^2
1	β^2

(21)

(dran denken: wir nehmen den Betrag der Vorfaktoren).
Anschließend ist das Teilchen entweder im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$.
Nun betrachten wir Eigenwerte und Vektoren der Matrix σ_x die auch schon auf dem 2ten Übungsblatt berechnet wurden,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -1 \tag{22}$$

Es ist nun einfach sich davon zu überzeugen das die Eigenvektoren gegeben sind durch,

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Damit ergibt sich,

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle) \tag{24}$$

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle) \tag{25}$$

Dementsprechend bekommen wir unabhängig vom ersten Erwartungswert,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	$1/2$
1	$1/2$

(26)

Teilaufgabe b)

In den Eigenzuständen von σ_x lässt sich der Zustand $|\psi(t)\rangle$ schreiben als,

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha e^{-i\omega_0 t/2}\left[|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta e^{i\omega_0 t/2}\left[|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle\right] && (27)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e^{-i\omega_0 t/2} + \beta e^{i\omega_0 t/2})|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e^{-i\omega_0 t/2} - \beta e^{i\omega_0 t/2})|\lambda_2\rangle && (28)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha+\beta)\cos(\omega_0 t/2) + i(\beta-\alpha)\sin(\omega_0 t/2)]|\lambda_1\rangle && (29)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha-\beta)\cos(\omega_0 t/2) - i(\alpha+\beta)\sin(\omega_0 t/2)]|\lambda_2\rangle && (30)
\end{aligned}$$

Wir sehen,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
1	$(\alpha+\beta)^2\cos^2(\omega_0 t_1/2) + (\beta-\alpha)^2\sin^2(\omega_0 t_1/2)$
-1	$(\alpha-\beta)^2\cos^2(\omega_0 t_1/2) + (\alpha+\beta)^2\sin^2(\omega_0 t_1/2)]$

(31)

Danach ist das System Projiziert auf den Zustand $|\lambda_1\rangle$ und $|\lambda_2\rangle$ die sich im Magnetfeld Zeitentwickeln wie,

$$\begin{aligned}
|\lambda_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega_0 t/2}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t/2}|\downarrow\rangle\right) && (32)\\
|\lambda_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{i\omega_0 t/2}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t/2}|\downarrow\rangle\right) && (33)
\end{aligned}$$

Auch hier sehen wir das sich unabhängig vom Zustand ergibt

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	$1/2$
1	$1/2$

(34)

Aufgabe 13

Teilaufgabe a)

Die Zeitentwicklung für ein Zustand in dem Wechselwirkungs-Bild ist durch die rekursive Gleichung

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' V_I(t')|\psi_I(t')\rangle \tag{35}$$

gegeben. Durch wiederholtes Einsetzen von $|\psi_I(t')\rangle$ in diese Gleichung kriegen wir eine Entwicklung in dem mutmasslich kleinen Wechselwirkungs-Term $V_I(t')$. In der zweiten Ordnung haben wir dann:

$$\begin{aligned}
|\psi_I(t)\rangle =& |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\left(\int_{-\infty}^{t} dt' V_I(t')\right)|\psi(0)\rangle - \frac{1}{\hbar^2}\left(\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-infty}^{t'} dt'' V_I(t')V_I(t'')\right)|\psi(0)\rangle\\
=& |\psi(0)\rangle - \left(\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' V_I(t') - \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t')V_I(t'')\right)|\psi(0)\rangle
\end{aligned} \tag{36}$$

Jetzt nehmen wir an dass der Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Eigenzustand $|i\rangle$ von H_0 war, und berechnen die Übergangs Amplitude zwischen dem zeitentwickelten Zustand $|\psi_I(t)\rangle$ und einem Eigenzustand $|f\rangle \neq |i\rangle$ von H_0:

$$p_{if}(t) = \langle f|\psi_I(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle f|V_I(t')|i\rangle + \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle f|V_I(t')V_I(t'')|i\rangle \tag{37}$$

Laut der Aufgabenstellung nehmen wir an dass die erste Ordnung im Stör-Term verschwindet:

$$p_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle f|V_I(t')V_I(t'')|i\rangle \tag{38}$$

Jetzt setzen wir die explizite Form des Stör-Terms

$$V_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} V \cos\omega t e^{\epsilon t} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=\pm} e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} V e^{i(\sigma\omega - i\epsilon)t} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$

ein und fügen $1 = \sum_z |z\rangle\langle z|$, wobei $|z\rangle$ Eigenzustände von H_0 sind, zwischen den Störungs-Termen ein:

$$p_{if}(t) = \frac{1}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm}\sum_{z}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{i(\omega_f - \omega_z + \sigma\omega - i\epsilon)t'} \langle f|V|z\rangle\langle z|V|i\rangle e^{-i(\omega_i - \omega_z - \sigma'\omega + i\epsilon)t''} \tag{39}$$

Die Übergangs-Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $P_{if}(t) = |p_{if}(t)|^2$. Die Übergangs-Rate definieren wir (für lange Zeiten) durch die Ableitung

$$\Gamma_{if}(t) = \partial_t P_{if}(t) = p_{if}^*(t)\partial_t p_{if}(t) + \text{c.c.}.$$

Nach Integration (und Ableitung) haben wir:

$$\begin{aligned}
\partial_t p_{if}(t) &= \frac{1}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm}\sum_{z} e^{i(\omega_f - \omega_z + \sigma\omega - i\epsilon)t}\langle f|V|z\rangle\langle z|V|i\rangle \int_{-\infty}^{t} dt'' e^{-i(\omega_i - \omega_z - \sigma'\omega + i\epsilon)t''} \\
&= \frac{1}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm}\underbrace{\left(\sum_{z}\frac{\langle f|V|z\rangle\langle z|V|i\rangle}{-i(\omega_i - \omega_z + \sigma'\omega - i\epsilon)}\right)}_{iF_{\sigma'}(\omega)} e^{i(\sigma+\sigma')\omega t} e^{2\epsilon t} e^{i(\omega_f - \omega_i)t} \\
&= \frac{e^{i(\omega_f - \omega_i)t} e^{2\epsilon t}}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm} iF_{\sigma'}(\omega) e^{i(\sigma+\sigma')\omega t}
\end{aligned} \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned}
p_{if}^*(t) &= \frac{1}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm}\sum_{z}\frac{\langle f|V|z\rangle^*\langle z|V|i\rangle^*}{(\omega_i - \omega_z + \sigma'\omega + i\epsilon)(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega + i\epsilon)} e^{-i(\sigma+\sigma')\omega t} e^{2\epsilon t} e^{-i(\omega_f - \omega_i)t} \\
&= \frac{e^{-i(\omega_f - \omega_i)t} e^{2\epsilon t}}{4\hbar^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\sigma'=\pm}\frac{F_{\sigma}^*(\omega)}{(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega + i\varepsilon)} e^{-i(\sigma+\sigma')\omega t}
\end{aligned} \tag{41}$$

und somit:

$$\Gamma_{if}(t) = \frac{e^{4\epsilon t}}{16\hbar^4} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\sigma'=\pm} \sum_{\sigma''=\pm} \sum_{\sigma'''=\pm} \frac{iF_\sigma^*(\omega) F_{\sigma'''}(\omega) e^{-i(\sigma+\sigma'-\sigma''-\sigma''')\omega t}}{(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega + i\epsilon)} + \text{c.c.} \tag{42}$$

Teilaufgabe b)

Wir haben nun Terme die oszillieren mit den Frequenzen $0, \pm 2\omega, \pm 4\omega$. Nehmen wir den Limes $\epsilon \to 0$ und mitteln über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ werden alle Terme ausser die jenigen die Zeit-Unabhängig sind, verschwinden. D.h. die Mittelung gibt uns eine Kroenecker delta Funktion, $\langle e^{-i(\sigma+\sigma'-\sigma''-\sigma''')\omega t}\rangle_T = \delta_{\sigma+\sigma',\sigma''+\sigma'''}$:

$$\begin{aligned} \langle \lim_{\epsilon\to 0} \Gamma_{if}\rangle_T =& \frac{1}{16\hbar^4} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\sigma'=\pm} \sum_{\sigma''=\pm} \sum_{\sigma'''=\pm} \delta_{\sigma+\sigma',\sigma''+\sigma'''} \times \\ & \times \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{iF_\sigma^*(\omega) F_{\sigma'''}(\omega)}{(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega + i\epsilon)} + \frac{-iF_\sigma(\omega) F_{\sigma'''}^*(\omega)}{(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega - i\epsilon)} \right) \end{aligned} \tag{43}$$

Hier stellen wir fest, dass $F_\sigma(\omega)$ keine Singularitäten hat (wenn $\epsilon \to 0$) da in der Aufgabenstellung angenommen wird dass die Matrix-Elemente $\langle z|V|i\rangle$ für $\omega_z = \omega_i \pm \omega$ verschwinden. Folgend können wir für diese Faktoren einfach $\epsilon = 0$ nehmen. Damit gilt auch automatisch, $F_\sigma^*(\omega) = F_\sigma(\omega)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \lim_{\epsilon\to 0} \Gamma_{if}\rangle_T =& \frac{1}{8\hbar^4} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\sigma'=\pm} \sum_{\sigma''=\pm} \sum_{\sigma'''=\pm} \delta_{\sigma+\sigma',\sigma''+\sigma'''} \times \\ & \times \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{\epsilon F_\sigma(\omega) F_{\sigma'''}(\omega)}{(\omega_f - \omega_i + (\sigma+\sigma')\omega)^2 + \epsilon^2)} \right) \end{aligned} \tag{44}$$

Benutzen wir dann denn Limes der Cauchy-Lorentz Verteilung:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \delta(x)\,, \tag{45}$$

haben wir letztendlich:

$$\langle \lim_{\epsilon\to 0} \Gamma_{if}\rangle_T = \frac{\pi}{8\hbar^4} \left[\sum_{\sigma=\pm} F_\sigma^2(\omega) \delta(\omega_f - \omega_i + 2\sigma\omega) + (F_+(\omega) + F_-(\omega))^2 \delta(\omega_f - \omega_i) \right] \tag{46}$$

Wir können den ersten Beitrag als den zwei-schritt Prozess $\omega_i \to \omega_i + \sigma\omega \to \omega_f + 2\sigma\omega$, d.h. zwei nacheinander folgende absorbtions-/emissions Prozesse) und den zweiten Beitrag als den zwei-schritt Prozess $\omega_i \to \omega_i + \sigma\omega \to \omega_f$, d.h. ein absorbtions-/emissions Prozess gefolgt von einem emissions-/absorbtions Prozess.