Lösung Blatt 2

08.11.2011

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

Zum Übergang in die Energie Darstellung definiert man die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$, a als,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + \frac{i}{\sqrt{m\omega p}}\right)\ ,\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p\right)\ . \tag{1}$$

Wir fangen mit dem Kommutator an,

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar}\left(-i[x,p] + i[p,x]\right) = 1 \tag{2}$$

Dann ergibt sich

$$x = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)\ ,\ p = -i\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \tag{3}$$

und $H = \hbar\omega(N + 1/2)$.

Damit haben die Eigenzustände die Eigenschaft $N|n\rangle = n|n\rangle$.

Nun können wir die Wirkung von a und $a^\dagger$ auf die Eigenzustände feststellen,

$$\left|a|n\rangle\right|^2 = \left|c|n-1\rangle\right|^2 = c^2\ ,\ \left|a|n\rangle\right|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n \Rightarrow n = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{n} \tag{4}$$

$$\left|a^\dagger|n\rangle\right|^2 = \left|c'|n+1\rangle\right|^2 = c'^2\ ,\ \left|a^\dagger|n\rangle\right|^2 = \langle n|a^\dagger a{+}1|n\rangle = n \Rightarrow n{+}1 = c'^2 \Rightarrow c' = \sqrt{n+1} \tag{5}$$

Teilaufgabe b)

Der eindimensionale Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right) \tag{6}$$

in der Energiedarstellung gegeben.

Der Zeitenwicklungsoperator ist gegeben durch,

$$U(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Ht\right] = \exp\left[-i\omega a^\dagger a t\right] \tag{7}$$

Damit ergibt sich,

$$U(t)|n\rangle = e^{-i\omega nt}|n\rangle \tag{8}$$

und,

$$|\phi(t)\rangle = U(t)|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega nt}|n\rangle + e^{-i\omega(n+1)t}|n+1\rangle\right) \tag{9}$$

Nun ist es einfach die Erwartungswerte zu berechnen

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle\phi(t)|x|\phi(t)\rangle = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\langle\phi(t)|a+a^\dagger|\phi(t)\rangle && (10)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\left[\langle n|a|n+1\rangle e^{-i\omega t} + \langle n+1|a^\dagger|n\rangle e^{i\omega t}\right] = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\sqrt{n+1}\cos(\omega t)\\
\langle p\rangle &= \langle\phi(t)|p|\phi(t)\rangle = -i\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}\langle\phi(t)|a-a^\dagger|\phi(t)\rangle && (11)\\
&= -i\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1}(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = -\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Es soll auch für weitere Operatoren der Erwartungswert berechnet werden,

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + {a^\dagger}^2 + 2a^\dagger a + 1\right) && (12)\\
p^2 &= \frac{\hbar m\omega}{2}\left(2a^\dagger a + 1 - a^2 - {a^\dagger}^2\right) && (13)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Erwartungswerte,

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(n+n+1+1) = \frac{\hbar}{m\omega}(n+1) && (14)\\
\langle p^2\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}(n+n+1+1) = \hbar m\omega\,(n+1) && (15)
\end{aligned}$$

Ich definiere jetzt den Vorfaktor als $v_x = \frac{\hbar}{2m\omega}$ und $v_p = \frac{\hbar m\omega}{2}$.

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 &= v_x\left(2(n+1) - (n+1)\cos^2(\omega t)\right) && (16)\\
&= v_x\left[(2-\cos^2\omega t)(n+1)\right]\\
(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 &= v_p\left[(2-\sin^2\omega t)(n+1)\right] && (17)
\end{aligned}$$

Für die Unschärferelation ergibt sich

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{1}{8}v_x v_p(17-\cos(4\omega t))(n+1)^2 \tag{18}$$

Und damit ergibt sich dann,

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}(n+1)\sqrt{(17-\cos(4\omega t))/8} > \frac{\hbar}{2} \tag{19}$$

Teilaufgabe c)

Zuerst finden wir eine Explizite Form der Operatoren a und $a^\dagger$ im Heisenberg-Bild,

$$a(t) = U^\dagger(t)aU(t) \tag{20}$$

Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp\left[i\omega a^\dagger a t\right] a \exp\left[-i\omega a^\dagger a t\right]\right) = i\omega \exp\left[i\omega a^\dagger a t\right]\left[a^\dagger a, a\right] \exp\left[-i\omega a^\dagger a t\right]$$
$$= -i\omega t \exp\left[i\omega a^\dagger a t\right] a \exp\left[-i\omega a^\dagger a t\right]$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a(t) &= -i\omega a(t) && (21) \\ \frac{\partial a(t)}{a(t)} &= -i\omega \partial t && (22) \end{aligned}$$

Nach Integration ergibt sich

$$a(t) = a e^{-i\omega t} \tag{23}$$

Mit der selben Methode erhalten wir

$$a^\dagger = a^\dagger e^{i\omega t} \tag{24}$$

Damit ergibt sich für x und p,

$$x(t) = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}(a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \ , \ p = -i\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}(a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) \tag{25}$$

Nun die Erwartungswerte,

$$\begin{aligned} \langle x(t)\rangle &= \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\langle\phi(0)|a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}|\phi(0)\rangle && (26) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\left[\langle n|a|n+1\rangle e^{-i\omega t} + \langle n+1|a^\dagger|n\rangle\right] = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}\sqrt{n+1}\cos(\omega t) \\ \langle p(t)\rangle &= -i\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}\langle\phi(0)|(a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t})|\phi(0)\rangle && (27) \\ &= -\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1}\sin(\omega t) && (28) \end{aligned}$$

Wir zu erwarten: Wir bekommen das Gleiche Ergebnis im Heisenberg-Bild wie im Schrödinger Bild.

Aufgabe 5

Der Spin-Operator $\vec{S}$ kann durch die Pauli-Matrizen ausgedrückt werden, $S_i = \hbar\sigma_i/2$, mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Ein Teilchen sei im Zustand

$$|\phi\rangle = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

präpariert, wobei α und β reelle Zahlen sind, mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Teilaufgabe a)

Wir messen die Eigenwerte von σ_z. Da die Matrix von σ_z in unserer Darstellung bereits Diagonal ist sehen wir sofort das die Eigenwerte gegeben sind durch $e1 = 1$ und $e_2 = -1$ und die Eigenvektoren durch

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{31}$$

Da der Zustand in der Form dieser Eigenvektoren geschrieben ist können wir sofort sehen:

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	α^2
1	β^2

(32)

Als Erwartungswert ergibt sich nun,

$$\begin{aligned} \langle\sigma_z\rangle &= \langle\phi|\sigma_z|\phi\rangle & (33) \\ &= [\alpha(\,0\;\;1\,) + \beta(\,1\;\;0\,)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] & (34) \\ &= \beta^2 - \alpha^2 & (35) \end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

Erst berechnen wir Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix σ_x,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -1 \tag{36}$$

Es ist nun einfach sich davon zu überzeugen das die Eigenvektoren gegeben sind durch,

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Damit lässt sich der Zustand umschreiben,

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (38) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\,[|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle] + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\,[|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle] & (39) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)||\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)|\lambda_2\rangle & (40) \end{aligned}$$

Wir sehen,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
1	$(\alpha+\beta)^2/2$
-1	$(\alpha-\beta)^2/2$

(41)

Teilaufgabe c)

1. Wir messen zuerst σ_z und danach σ_x.

Eigenwerte und Wahrscheinlichkeiten der ersten Messung

$$\begin{array}{c|c} \text{Eigenwert} & \text{Wahrscheinlichkeiten} \\ \hline -1 & \alpha^2 \\ 1 & \beta^2 \end{array} \tag{42}$$

Nach der Ersten Messung sind wir entweder im Zustand

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle \right) \tag{43}$$

oder

$$|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle \right) \tag{44}$$

Damit ergeben sich in beiden Fällen die Eigenwerte und Wahrscheinlichkeiten,

$$\begin{array}{c|c} \text{Eigenwert} & \text{Wahrscheinlichkeiten} \\ \hline -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{array} \tag{45}$$

2. Wenn wir zuerst in Richtung σ_x messen bekommen wir

$$\begin{array}{c|c} \text{Eigenwert} & \text{Wahrscheinlichkeiten} \\ \hline 1 & (\alpha+\beta)^2/2 \\ -1 & (\alpha-\beta)^2/2 \end{array} \tag{46}$$

Danach ergibt sich auch unabhängig vom Resultat der ersten Messung

$$\begin{array}{c|c} \text{Eigenwert} & \text{Wahrscheinlichkeiten} \\ \hline -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{array} \tag{47}$$

Wir sehen hier das die Wahrscheinlichkeiten der Verschiedenen Resultate davon abhängen welcher Operator zuerst gemessen wird.

Aufgaben 6

Teilaufgabe a)

In dieser Aufgabe Benutzen wir die Relation die in Aufgabe 1a) gezeigt wurde auf dem ersten Blatt.

$$[x, G(p)] = \sum_n g_n [x, p^n] = \sum_n g_n n p^{n-1} [x, p] = i\hbar \sum_n g_n n p^{n-1} = i\hbar \frac{\partial G(p)}{\partial p} \tag{48}$$

$$[p, F(x)] = \sum_n f_n [p, x^n] = \sum_n f_n n x^{n-1} [p, x] = -i\hbar \sum_n f_n n x^{n-1} = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x} \tag{49}$$

Teilaufgabe b)

$$\mathcal{T}(d) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p\, d\right) . \tag{50}$$

Wie ändert sich der Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle \psi' | x | \psi' \rangle = \langle \psi | \mathcal{T}^\dagger(d) x \mathcal{T}(d) | \psi \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle + \langle \psi | \mathcal{T}^\dagger(d) [x, \mathcal{T}(d)] | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | x | \psi \rangle + i\hbar \langle \psi | \mathcal{T}^\dagger(d) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial p} | \psi \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle + d \end{aligned} \tag{51}$$

Aufgaben 7

Wir betrachten ein freies Teilchen in einem Magnetfeld in z-Richtung mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 . \tag{52}$$

Wir nehmen an, dass das Teilchen sich nur in zwei Dimensionen bewegt (x-y-Ebene) und wählen die Eichung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{53}$$

Damit lässt sich der Hamiltonian umschreiben,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(p_y - qBx\right)^2 \tag{54}$$

Wir wählen den Ansatz,

$$\psi = \phi(y)\varphi(x) \ \ , \ \phi(y) = e^{ik_y y} \tag{55}$$

Damit ergibt sich die Eigenwert Gleichung

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(k_y - qBx\right)^2\right] \varphi(x) = E\varphi(x) \tag{56}$$

Dies ist die Eigenwertgleichung eines Harmonischen Oszillators mit verschobenem Ursprung.

Damit ergeben sich die Eigenenergien,

$$E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2) \ , \ \omega_c = Bq/m \tag{57}$$