Lösung Blatt 1

25.10.11

Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Für n=2 gilt,

$$[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A = 2A[A, B] \tag{1}$$

Nun für $n \to n + 1$,

$$[A^{n+1}, B] = A[A^n, B] + [A, B]A^n = nAA^{n-1}[A, B] + [A, B]A^n = (n+1)A^n[A, B] \tag{2}$$

Teilaufgabe b)

Wir definieren die Funktion:

$$G(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B} \tag{3}$$

Damit ergibt sich,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}G(\lambda) = e^{\lambda A}(A + B)e^{\lambda B} \tag{4}$$

Jetzt versuchen wir beide Exponenten auf eine Seite zu bringen. Dazu müssen wir $e^{\lambda A}$ und B vertauschen.

$$[e^{\lambda A}, B] \quad = \quad \sum_n \frac{1}{n!}\lambda^n[A^n, B] \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Nun benutzen wir das Resultat aus der a) und sehen,

$$[e^{\lambda A}, B] = \sum_n \frac{1}{n!}\lambda^n nA^{n-1}[A, B] = \lambda[A, B]\sum_n \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n-1}A^{n-1} = \lambda[A, B]e^{\lambda A} \tag{7}$$

Daraus folgt,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}G(\lambda) = (A + B + \lambda[A, B])G(\lambda) \tag{8}$$

Nach integration ergibt sich damit,

$$G(\lambda) = \exp\left[\lambda(A+B) + \lambda^2[A,B]/2\right] G(0) \tag{9}$$

und damit für $\lambda = 1$,

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} \tag{10}$$

oder

$$e^A e^B e^{-[A,B]/2} = e^{A+B} \tag{11}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Die Matrix ist reel und symmetrisch, also Hermitesch. Die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte λ lautet:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \Rightarrow \tag{13}$$

$$\lambda(\lambda^2 - \hbar^2\omega_0^2) = 0\,. \tag{14}$$

Damit gilt

$$\lambda_1 = 0\ ,\ \ \lambda_2 = \hbar\omega_0\ ,\ \ \lambda_3 = -\hbar\omega_0 \tag{15}$$

Alle Eigenwerte sind nichtentartet. Die Eigenvektoren $\vec{e}_i$ der Matrix H genügen der folgenden Gl.:

$$(H - \lambda_i I)\vec{e}_i = 0, \tag{16}$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \end{pmatrix} \tag{17}$$

Für λ_1 erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{18}$$

Daraus folgt $c_1^1 = 1$, $c_2^1 = 0$, $c_3^1 = 1$, und der normierte Eigenvektor ist gegeben durch,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Für λ_2,

$$\begin{pmatrix} -\hbar\omega_0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\hbar\omega_0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & -\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \end{pmatrix} = 0\,. \Rightarrow \tag{20}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Und schlieslich für λ_3,

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & \hbar\omega_0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} & \hbar\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \end{pmatrix} = 0\,. \Rightarrow \tag{22}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Alternative Schreibweise der Eigenvektoren,

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right) \tag{24}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|u_1\rangle - \sqrt{2}|u_2\rangle - |u_3\rangle\right) \tag{25}$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{2}\left(|u_1\rangle + \sqrt{2}|u_2\rangle - |u_3\rangle\right) \tag{26}$$

Teilaufgabe b)

Die Orthogonalitätsbedingung lautet:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \tag{27}$$

$$\langle e_1|e_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \tag{28}$$

$$\langle e_1|e_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \tag{29}$$

$$\langle e_2|e_3\rangle = \frac{1}{4}(1\ \ -\sqrt{2}\ \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 \tag{30}$$

Die Vollständigkeitsrelation lautet:

$$\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = 1 \tag{31}$$

Wir berechnen explizit:

$$|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| + |e_3\rangle\langle e_3| = \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 1)+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}(1\ \ -\sqrt{2}\ \ -1)+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}(1\ \ -\sqrt{2}\ \ -1)$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&-1\\-\sqrt{2}&2&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&2&-\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{33}$$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

Die Schrödinger-Gleichung für das Delta-Funktions Potential lautet,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2}{\delta x^2}-c\delta(x)-c\delta(x-d)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{34}$$

Wir können nun die Wellenfunktion in drei Teile unterteilen,

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{\rho x} & x<0\\ B_1e^{\rho x}+B_2e^{-\rho x} & 0<x<d\\ Ce^{-\rho(x-d)} & x>d\end{cases} \tag{35}$$

Damit die Funktion für $x\to\pm\infty$ abklingt muss gelten $\rho>0$.

Wir fordern stetigkeit der Wellenfunktion und damit gilt,

$$\psi(0+)=\psi(0-)\ ,\ \psi(d+)=\psi(d-) \tag{36}$$

Die erste ableitung der Wellenfunktion ist jedoch unstetig. Als Beispiel integrieren wir die Wellenfunktion um $x=0$,

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)dx-\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(c\delta(x)+c\delta(x-d))\psi(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\psi(x)dx \tag{37}$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon)-\psi'(-\epsilon)\right]-c\psi(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\psi(x)dx \tag{38}$$

Im limes $\epsilon\to 0$ sehen wir,

$$\psi'(0+)-\psi'(0-)=-\frac{2mc}{\hbar^2}\psi(0) \tag{39}$$

und ähnlich

$$\psi'(d+)-\psi'(d-)=-\frac{2mc}{\hbar^2}\psi(d) \tag{40}$$

Für den Punkt $x=0$ finden wir jetzt mit den Randbedingungen,

$$A = B_1+B_2 \tag{41}$$
$$\rho B_1-\rho B_2-\rho A = -\frac{2mc}{\hbar^2}A \tag{42}$$
$$\Rightarrow B_1 = \left[-1+\frac{\rho\hbar^2}{mc}\right]B_2 \tag{43}$$

und an der Stelle $x = d$,

$$\begin{aligned} C &= B_1 e^{\rho d} + B_2 e^{-\rho d} && (44) \\ -\rho C - \rho B_1 e^{\rho d} + \rho B_2 e^{-\rho d} &= -\frac{2mc}{\hbar^2} C && (45) \\ \Rightarrow B_1 &= B_2 e^{-2\rho d} \left(\frac{1}{\frac{\rho\hbar^2}{mc} - 1} \right) && (46) \end{aligned}$$

Beide Resultate zusammen geben,

$$e^{-2\rho d} \left[\frac{1}{\frac{\rho\hbar^2}{mc} - 1} \right] = \left[-1 + \frac{\rho\hbar^2}{mc} \right] \Rightarrow e^{-2\rho d} = \left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc} \right)^2 \quad (47)$$

oder,

$$e^{-\rho d} = \pm \left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc} \right) \quad (48)$$

Teilaufgabe b)

Analyse im limes $\rho d \ll 1$

$$e^{-\rho d} \approx 1 - \rho d = \pm \left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc} \right) \quad (49)$$

Daraus ergebens sich zwei Lösungen, ρ_+ für das positive Vorzeichen, und ρ_-, für das negative Vorzeichen,

$$\rho_+ = 0 \ , \ \rho_- = \frac{2}{d + \frac{\hbar^2}{mc}} \quad (50)$$

Somit ergibt sich eine Energie $E < 0$,

$$E_- = -\frac{4mc^2}{2\hbar^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{mcd}{\hbar^2}\right)^2} \quad (51)$$

Analyse im limes $\rho d \gg 1$ In niedrigster Ordnung ergibt sich $e^{-\rho d} = 0$ und damit,

$$\rho_0 = \frac{mc}{\hbar^2} \quad (52)$$

Also wählen wir nun den Ansatz,

$$\rho = \rho_0 - \alpha \quad (53)$$

und nehmen an das gilt $\alpha \ll 1$ Daraus folgt,

$$e^{-\rho_0 d}(1 + \alpha d) = \pm \frac{\alpha\hbar^2}{mc} \quad (54)$$

Auflösen nach α ergibt,

$$\alpha = \frac{e^{-\rho_0 d}}{-de^{-\rho_0 d} \pm \frac{\hbar^2}{mc}} = \frac{e^{\rho_0 d}\rho_0}{-e^{-\rho_0 d}\rho_0 d \pm 1} \approx \pm\rho_0 e^{-\rho_0 d} \tag{55}$$

Wir erhalten also die beiden Lösungen,

$$\rho_\pm = \frac{mc}{\hbar^2}\left(1 \mp e^{-\frac{mcd}{\hbar^2}}\right) \tag{56}$$

und damit

$$E_\pm = -\frac{mc^2}{2\hbar^2}\left(1 \mp e^{-\frac{mcd}{\hbar^2}}\right)^2 \tag{57}$$

Man sieht das die beiden Energien im Limes $d \to \infty$ entartet sind.