Übungsblatt 11: Lösungen

February 1, 2012

$\boxed{35}$ Zusammensetsungen von Lorentz-Transformationen

a) Ein Lorentz-Boost entlang der x^1-Achse ist mit der Rabidität η gegeben durch

$$L_1(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei $\tanh\eta = v/c$. Setzen wir zwei Lorentz-Boosts zusammen haben wir[1]

$$\begin{aligned} L_1(\eta_1)L_1(\eta_2) &= \begin{pmatrix} \cosh\eta_1 & -\sinh\eta_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_1 & \cosh\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\eta_2 & -\sinh\eta_2 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_2 & \cosh\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\eta_1\cosh\eta_2 + \sinh\eta_1\sinh\eta_2 & -\cosh\eta_1\sinh\eta_2 - \sinh\eta_1\cosh\eta_2 & 0 & 0 \\ -\cosh\eta_1\sinh\eta_2 - \sinh\eta_1\cosh\eta_2 & \cosh\eta_1\cosh\eta_2 + \sinh\eta_1\sinh\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Benutzen wir $\cosh\eta_1\cosh\eta_2+\sinh\eta_1\sinh\eta_2 = \cosh(\eta_1+\eta_2)$ und $\cosh\eta_1\sinh\eta_2+\sinh\eta_1\cosh\eta_2 = \sinh(\eta_1+\eta_2)$ so haben wir

$$L_1(\eta_1)L_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1+\eta_2)_1 & -\sinh(\eta_1+\eta_2) & 0 & 0 \\ -\sinh(\eta_1+\eta_2) & \cosh(\eta_1+\eta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L(\eta_1+\eta_2) \tag{3}$$

Benutzen wir dann

$$v = c\tanh(\eta_1+\eta_2) = \frac{c\tanh\eta_1 + c\tanh\eta_2}{1+\tanh\eta_1\tanh\eta_2} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} \tag{4}$$

so haben wir die relativistische Additionsformel gezeigt.

[1] Die Kombination ist leichter zu berechnen in der exponentiellen Darstellung $L_1(\eta) = e^{-i\eta\mathcal{K}^1}$ in der $L_1(\eta_1)L_1(\eta_2) = e^{-i(\eta_1+\eta_2)\mathcal{K}^1} = L_1(\eta_1+\eta_2)$.

b) Der infinitesimale Boost wird dargestellt durch $L_1(\Delta\eta) = \mathbb{1} - i\Delta\eta\mathcal{K}^1$ und die Drehungen durch $R_3(\Delta\theta) = \mathbb{1} + i\Delta\theta\mathcal{I}^3$ und $R_3^{-1}(\Delta\theta) = \mathbb{1} - i\Delta\theta\mathcal{I}^3$, wobei

$$\mathcal{K}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{I}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} R_3^{-1}(\Delta\theta)L_1(\Delta\eta)R_3(\Delta\theta) &= (\mathbb{1} - i\Delta\theta\mathcal{I}^3)(\mathbb{1} - i\Delta\eta\mathcal{K}^1)(\mathbb{1} + i\Delta\theta\mathcal{I}^3) \\ &= \mathbb{1} - i\Delta\eta\mathcal{K}^1 - \Delta\eta\Delta\theta[\mathcal{I}^3, \mathcal{K}^1] + \mathcal{O}(\Delta\theta^2, \Delta\eta^2) \end{aligned} \tag{6}$$

benutzen wir

$$\begin{aligned} [I^3, \mathcal{K}^1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\mathcal{K}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

[**Anmerkung:** Vergleichen Sie mit $[\mathcal{I}^i, \mathcal{K}^j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}^j$.]
Setzen wir dies ein haben wir

$$R_3^{-1}(\Delta\theta)L_1(\Delta\eta)R_3(\Delta\theta) = \mathbb{1} - i\Delta\eta(\mathcal{K}^1 + \Delta\theta\mathcal{K}^2) \tag{8}$$

Dies ist ein infinitesimaler Boost entlang der richtung $(1, \Delta\theta, 0)$ in der x^1-x^2-Ebene. Die endlichen Transformationen sind gegeben durch

$$L_1(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

und $R_3^{-1}(\theta) = R_3(-\theta)$. Die zusammengesetzte Lorentz-Transformation gibt dann

$$\begin{aligned} R^{-1}(\tfrac{\pi}{2})L_1(\eta)R(\tfrac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & -\sinh\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & 0 & \cosh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2(\eta) \end{aligned} \tag{10}$$

welches einen Lorentz-Boost entlang der x^2-Achse entspricht.

c) Die Kombination zweier Lorentz-Boosts ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Lambda = L_1(\eta_1)L_2(\eta_2) &= \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & -\sinh\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & 0 & \cosh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\eta_1\cosh\eta_2 & -\sinh\eta_1 & -\cosh\eta_1\sinh\eta_2 & 0 \\ -\sinh\eta_1\cosh\eta_2 & \cosh\eta_1 & \sinh\eta_1\sinh\eta_2 & 0 \\ -\sinh\eta_2 & 0 & \cosh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

Da ein reiner Lorentz-Boost symmetrisch sein muss kann dies kein reiner Lorentz-Boost sein. (Das die Kombination von zwei Lorentz-Boosts nicht durch eine symmetrische Matrix dargestellt wird kann man schon von $\Lambda^T = (L_1(\eta_1)L_2(\eta_2))^T = L_2(\eta_2)L_1(\eta_1) \neq \Lambda$ sehen).

$\boxed{36}$ **Die chirale-Darstellung (Weyl-Darstellung)** Wir haben in der chiralen-Darstellung

$$\alpha^i \mapsto M\alpha^i M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \tag{12}$$

und

$$\beta = \gamma^0 \mapsto M\beta M^{-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

a) Die Spinor-Darstellung der Lorentz-Boosts sind gegeben durch $S(L_i) = e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i}$. Da α^i in der chiralen-Darstellung Blockdiagonal sind, haben wir:

$$S(L_i) = e^{-\frac{\eta}{2}\alpha^i} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}\sigma^i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}\sigma^i} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Die Spinor-Darstellung der Drehungen haben die Form $S(R_i) = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^i}$. Die Σ^i-Matrizen bleiben unter der Transformation von der standard-Darstellung in die chirale-Darstellung gleich $M\Sigma^i M^{-1} = \Sigma^i$. Da diese schon Blockdiagonal sind haben wir

$$S(R_i) = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma^i} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma^i} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\sigma^i} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Da jede Lorentz-Transformation in der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe als Kombination von Lorentz-Boosts und Drehungen dargestellt werden kann, haben wir

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} S_L(\Lambda) & 0 \\ 0 & S_R(\Lambda) \end{pmatrix} \tag{16}$$

[**Anmerkung:** Hier sollten $S_L(\Lambda)$ und $S_R(\Lambda)$ nicht verwechselt werden mit $S(L)$ und $S(R)$. Die letzteren sind 4×4 Matrizen die den vierkomponentigen Dirac-Spinor unter einem Loorentz boost, beziehungsweise einer Rotation transformieren. Die Matrizen $S_L(\Lambda)$ und $S_R(\Lambda)$ sind die 2×2 Matrizen die in den Blockdiagonalen für eine beliebige transformation $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ vorkommen. Die Indizes L und R stehen für Linkshändig und Rechtshändig.]

Schreiben wir $\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix}$ Transformiert der Spinor

$$\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\psi'_L(x')\\ \psi'_R(x')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_L(\Lambda) & 0\\ 0 & S_R(\Lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_L(\Lambda)\psi_L(x)\\ S_R(\Lambda)\psi_R(x)\end{pmatrix} \tag{17}$$

Benutzen wir die Gleichung $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$ und

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \begin{pmatrix}S_R^\dagger(\Lambda) & 0\\ 0 & S_L^\dagger(\Lambda)\end{pmatrix} \tag{18}$$

zusammen mit

$$S^{-1}(\Lambda) = \begin{pmatrix}S_L^{-1}(\Lambda) & 0\\ 0 & S_R^{-1}(\Lambda)\end{pmatrix} \tag{19}$$

haben wir $S_R(\Lambda) = (S_L^{-1}(\Lambda))^\dagger$. Die Raum-Spiegelung $S(P) = \gamma^0$ bewirkt

$$\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\psi'_L(x')\\ \psi'_R(x')\end{pmatrix} = \gamma^0\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_R(x)\\ \psi_L(x)\end{pmatrix} \tag{20}$$

b) In der chiralen Darstellung nimmt die Dirac-Gleichung die Form

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) & mc^2\\ mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix} \tag{21}$$

In dem Ruhesystem I' haben wir dann

$$i\hbar\partial_{t'}\begin{pmatrix}\psi_L(t')\\ \psi_R(t')\end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L(t')\\ \psi_R(t')\end{pmatrix} \tag{22}$$

oder $i\hbar\partial_{t'}\psi_L(t') = mc^2\psi_R(t')$. Die Gleichung ist erfüllt durch $\psi_L(t') = \psi_R(t') = \chi e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t'}$, wobei χ ein beliebiger zweikomponentiger Spinor ist. Wir sind frei den Spinor entweder als χ_+ mit $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_+ = \chi_+$ oder als χ_- mit $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_- = -\chi_-$ zu wählen. Wir notieren dass diese zwei Lösungen orthogonal zu einander sind. Wir haben somit gezeigt dass in der chiralen-Darstellung

$$\psi_\pm(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_\pm\\ \chi_\pm\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t'}, \quad \text{mit} \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_\pm = \pm\chi_\pm, \tag{23}$$

zwei orthogonale Lösungen der Dirac-Gleichung im Ruhesystem darstellen. Um die Lösungen für ein Teilchen mit Impuls $\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}$ zu finden, machen wir einen Lorentz-Boost in ein Inertialsystem mit relativer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = -|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{n}$. So ein Lorentz-Boost wird Dargestellt durch

$$S = e^{\frac{\eta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix}e^{\frac{\eta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2}\mathbb{1} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} & 0\\ 0 & \cosh\frac{\eta}{2}\mathbb{1} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix} \tag{24}$$

mit $\tanh\eta = |\boldsymbol{v}|/c$. Damit dieser Boost dem Teilchen den relativistischen Impuls $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, mit $\gamma = (1 - |\boldsymbol{v}/c|^2)^{-1/2}$, gibt müssen wir $\tanh\eta = |\boldsymbol{v}/c| = |\boldsymbol{p}/p^0|$ wählen.

Die Lösungen der Dirac-Gleichung in einem Inertialsystem I in dem das Teilchen den Impuls $\boldsymbol{p}$ hat ist gegeben durch

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\cosh\frac{\eta}{2}\mathbb{1} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\right)\chi_\pm \\ \left(\cosh\frac{\eta}{2}\mathbb{1} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\right)\chi_\pm \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} \left(1\pm\tanh\frac{\eta}{2}\right)\chi_\pm \\ \left(1\mp\tanh\frac{\eta}{2}\right)\chi_\pm \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} \tag{25}$$

Benutzen wir (von der Vorlesung) $\cosh\frac{\eta}{2} = \sqrt{(E+mc^2)/2mc^2}$ und $\tanh\frac{\eta}{2} = c|\boldsymbol{p}|/(E+mc^2)$ haben wir

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+mc^2}{mc^2}} \begin{pmatrix} \left(1\pm\frac{c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2}\right)\chi_\pm \\ \left(1\mp\frac{c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2}\right)\chi_\pm \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{26}$$

c) Der Helizitäts-Operator ist gegeben durch

$$h(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Da die Spinoren $\chi_\pm$ Eigenzustände von $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ mit eigenwerten ± 1 sind, haben wir

$$h(\boldsymbol{p})\psi_\pm(x) = \pm\psi_\pm(x). \tag{28}$$

Im ultrarelativistischen Grenzwert haben wir $E \approx c|\boldsymbol{p}| \gg mc^2$ und wir können den Vorfaktor $\sqrt{(E+mc^2)/mc^2}$ mit $\sqrt{|\boldsymbol{p}|/mc}$ ersetzen. Was noch wichtiger ist, wir können $c|\boldsymbol{p}|/(E+mc^2)$ mit $c|\boldsymbol{p}|/c|\boldsymbol{p}| = 1$ erstetzen. Somit bekommen wir

$$\psi_\pm(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c|\boldsymbol{p}|}{mc^2}} \begin{pmatrix} (1\pm 1)\chi_\pm \\ (1\mp 1)\chi_\pm \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{29}$$

Also haben wir

$$\psi_+(x) \approx \sqrt{\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

und

$$\psi_-(x) \approx \sqrt{\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_- \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \tag{31}$$

Die Chiralitäts-Matrix γ^5 nimmt in der chiralen-Darstellung (von der Standard-Darstellung durch $\gamma^5 \mapsto M\gamma^5 M^{-1}$ erhalten) die Form

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Also sind die Lösungen in dem ultrarelativistischen Grenzwert Eigenzustände des Chiralitäts-Operators

$$\gamma^5\psi_\pm(x) = \pm\psi_\pm(x) \tag{33}$$

Anmerkungen: Wie vorhin schon gesagt wurde, stehen die Indizes L und R für Linkshändig und Rechtsändig. Diese Notation stammt davon, dass ψ_L und ψ_R unter Raumspiegelungen in einander transformieren. Genau wie eine linke Hand in einen Spiegel aussieht wie eine rechte Hand, und umgekehrt. Allgemein ist diese "handedness" (Englisch) keine Quantenzahl. D.h. die Eigenzustände des Dirac-Hamilton-Operators sind nicht Eigenzustände der

Chiralitäts-Matrix γ^5. [Es ist einfach zu zeigen dass die Chiralitäts-Matrix nicht mit dem Dirac-Hamilton-Operator vertauscht da es mit β *anti*-kommutiert (Aufgabe 32b Blatt 10)]. Wenn das Teilchen aber keine Masse hat $m = 0$ kommt β in dem Dirac-Hamilton-Operator nicht vor, und Chiralität wird eine gute Quantenzahl. In dem ultrarelativistischen Grenzfall kann der Massenterm vernachlässigt werden und Chiralität ist in dieser Näherung eine gute Quantenzahl.

Etwas verwirrend ist, dass man auch die Notation "Linkshändig" und "Rechtsändig" für die Eigenzustände des Helizitäts-Operators benutzt. Das kommt daher dass diese auch unter einer Raumspiegelung in einander transformieren (da unter einer Raumspiegelung $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$). Der Helizitäts-Operator vertauscht mit dem freien Dirac-Hamilton-Operator und somit ist Helizität eine gute Quantenzahl. Allerdings ist Helizität nicht Lorentzinvariant da es von dem Impuls abhängt, d.h. ein Teilchen das in einem Inertialsystem positive Helizität hat, könnte in einem anderen Inertialsystem eine negative Helizität haben. Die Ausnahme ist für Teilchen ohne Masse, diese bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit, und es gibt kein Inertialsystem wo der Impuls (und somit die Helizität) eine umgekehrte Richtung hat. In dem ultrarelativistischen Grenzfall, wobei die Ruhemasse vernachlässigt wird, ist Helizität und Chiralität das gleiche.