Übungsblatt 10: Lösungen

January 26, 2012

$\boxed{32}$ Eigenschaften der Dirac-Matrizen.

a)

$$(\alpha^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^i)^\dagger \\ (\sigma^i)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \alpha^i, \quad \beta^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \beta \tag{1}$$

wobei wir die Eigenschaft $(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$ der Pauli-Matrizen benutzt haben.

$$\begin{aligned} \alpha^i\alpha^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i &= \begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = 2\delta^{ij}\mathbb{1} \end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir die Eigenschaft $\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1}_{2\times 2}$ benutzt haben.

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

Von Gl. (2) mit $i = j$ zusammen mit $(\sigma^i)^2 = \mathbb{1}_{2\times 2}$ haben wir direkt $(\alpha^i)^2 = \mathbb{1}$.

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{4}$$

b)

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha^i \tag{5}$$

Das bedeutet $(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$ und $(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = (\alpha^i)^\dagger\beta^\dagger = \alpha^i\beta$. Von $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$ wissen wir, dass $\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i$. Also haben wir $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$.

Da $\beta^2 = 1$ können wir Zeigen, dass $\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = \beta^2\alpha^i\beta = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^0 = (\gamma^i)^\dagger$, und $\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger$. Zusammen können wir dies als $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ schreiben.

Weiter haben wir von $\beta^2 = 1$ dass $(\gamma^0)^2 = \beta^2 = 1$ und $(\gamma^i)^2 = (\beta\alpha^i)^2 = \beta\alpha^i\beta\alpha^i = -\alpha^i\beta\beta\alpha^i = -(\alpha^i)^2 = -1$.

Die Chiralitäts-Matrix ist definiert durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\beta(\beta\alpha^1)(\beta\alpha^2)(\beta\alpha^3) = i\alpha^1\beta\alpha^2\beta\alpha^3 = -i\alpha^1\alpha^2\beta\beta\alpha^3 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3. \tag{6}$$

In der Standard-Darstellung haben wir

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

Berechnen wir erst den Anti-Kommutator

$$\{\gamma^5, \gamma^0\} = \{\gamma^5, \beta\} = \gamma^5\beta + \beta\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

und danach

$$\{\gamma^5, \gamma^i\} = \gamma^5\gamma^i + \gamma^i\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

Durch diese können wir dann zeigen, dass

$$[\gamma^5, \alpha^i] = [\gamma^5, \beta\gamma^i] = \gamma^5\beta\gamma^i - \beta\gamma^i\gamma^5 = -\beta(\gamma^5\gamma^i + \gamma^i\gamma^5) = 0 \tag{10}$$

Wir haben zudem noch:

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i]) = -\frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2}(\beta\beta\alpha^i - \beta\alpha^i\beta) = -\frac{i}{2}(\alpha^i + \alpha^i) = -i\alpha^i = i\alpha_i \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2}(\beta\alpha^i\beta\alpha^j - \beta\alpha^j\beta\alpha^i) = -\frac{i}{2}(\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i) \\
&= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} \\
&= \epsilon_{ijk}\Sigma^k
\end{aligned} \tag{12}$$

$\boxed{33}$ **Drehimpulserhaltung in der Dirac-Gleichung** Berechnen wir erst $[H, \boldsymbol{L}]$. Da $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times (-i\hbar\boldsymbol{\nabla})$ keine Matrixstruktur in dem Dirac-Spinorraum hat, müssen wir nur $[-i\hbar\partial_i, x_j(-i\hbar\partial_k)]$ berechnen. Dies können wir machen in dem wir den Kommutator auf eine Testfunktion f anwenden

$$[-i\hbar\partial_i, x^j(-i\hbar\partial_k)]f = (-i\hbar)^2\left(\delta^j{}_i\partial_k + x^j\partial_i\partial_k\right)f - (-i\hbar)^2 x^j\partial_i\partial_k f = (-i\hbar)^2\delta^j{}_i\partial_k f \tag{13}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
[H, L^l] &= c\alpha^i[(-i\hbar\partial_i), \epsilon_j{}^{kl}x^j(-i\hbar\partial_k)] = c\alpha^i\epsilon_j{}^{kl}[(-i\hbar\partial_i), x^j(-i\hbar\partial_k)] \\
&= c(-i\hbar)^2\alpha^i\epsilon_j{}^{kl}\delta^j{}_i\partial_k = c(-i\hbar)^2\epsilon_i{}^{kl}\alpha^i\partial_k \\
&= (-i\hbar)c\boldsymbol{\alpha} \times (-i\hbar\boldsymbol{\nabla})
\end{aligned} \tag{14}$$

Berechnen wir dann $[H, S^l] = (\hbar/2)[c\alpha^i(-i\hbar\partial_i), \Sigma^l] + (\hbar/2)[\beta mc^2, \Sigma^l]$. Für den zweiten Term haben wir

$$\frac{\hbar mc^2}{2}[\beta, \Sigma^l] = \frac{\hbar mc^2}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^l & 0\\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sigma^l & 0\\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = 0 \tag{15}$$

und für den ersten Term

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{2}[c\alpha^i(-i\hbar\partial_i), \Sigma^l] &= \frac{c\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^l & 0\\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sigma^l & 0\\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}\right)(-i\hbar\partial_i)\\ &= \frac{c\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\sigma^l - \sigma^l\sigma^i\\ \sigma^i\sigma^l - \sigma^l\sigma^i & 0\end{pmatrix}(-i\hbar\partial_i) = \frac{c\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 2i\epsilon^{il}{}_k\sigma^k\\ 2i\epsilon^{il}{}_k\sigma^k & 0\end{pmatrix}(-i\hbar\partial_i)\\ &= i\hbar c\epsilon^{il}{}_k\alpha^k(-i\hbar\partial_i) = -(-i\hbar)\boldsymbol{\alpha}\times(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) = -[H, L^l]\end{aligned} \tag{16}$$

Also haben wir $[H, J^l] = [H, L^l] + [H, S^l] = 0$.

33 Dirac-Gleichung im homogenen Magnetfeld.

a) Definieren wir $Q(\boldsymbol{A}) = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})$ so können wir die Gleichungen für die zweikomponentigen Spinoren ϕ_1, ϕ_2 auf die folgende Form bringen

$$\begin{aligned} mc^2\phi_1 + Q(\boldsymbol{A})\phi_2 = E\phi_1\\ Q(\boldsymbol{A})\phi_1 - mc^2\phi_2 = E\phi_2\end{aligned} \tag{17}$$

Aus der zweiten Gleichung können wir $\phi_2 = (E + mc^2)^{-1}Q(\boldsymbol{A})\phi_1$ bekommen. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein haben wir

$$Q^2(\boldsymbol{A})\phi_1 = (E^2 - m^2c^4)\phi_1 \tag{18}$$

Das Quadrat von $Q(\boldsymbol{A})$ ist

$$\begin{aligned}Q^2(\boldsymbol{A}) &= c^2\sigma^i\sigma^j(-i\hbar\partial_i - \tfrac{e}{c}A_i)(-i\hbar\partial_j - \tfrac{e}{c}A_j)\\ &= c^2(\delta^{ij} + i\epsilon^{ij}{}_k\sigma^k)(-i\hbar\partial_i - \tfrac{e}{c}A_i)(-i\hbar\partial_j - \tfrac{e}{c}A_j)\\ &= c^2(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 + c^2 i\epsilon^{ij}{}_k\sigma^k\left(-\hbar^2\partial_i\partial_j + i\hbar\tfrac{e}{c}(\partial_i A_j + A_i\partial_j) + \left(\tfrac{e}{c}\right)^2 A_i A_j\right)\end{aligned} \tag{19}$$

wobei wir $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ij}{}_k\sigma^k$ benutzt haben. Da $\epsilon^{ij}{}_k\partial_i\partial_j f = (\boldsymbol{\nabla}\times\nabla f)_k = 0$, wobei f eine beliebige Testfunktion ist, und $\epsilon^{ij}{}_k A_i A_j = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})_k = 0$, bleibt nur der mittlere Term. Diesen können wir vereinfachen, indem wir uns ansehen wie Sie auf eine Testfunktion f wirkt

$$\begin{aligned}\epsilon^{ij}{}_k(\partial_i A_j + A_i\partial_j)f &= \epsilon^{ij}{}_k(\partial_i A_j)f + \epsilon^{ij}{}_k A_j(\partial_i f) + \epsilon^{ij}{}_k A_i(\partial_j f)\\ &= (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_k f + (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla} f)_k - (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla} f)_k\\ &= \boldsymbol{B}_k f\end{aligned} \tag{20}$$

Also haben wir

$$Q^2(\boldsymbol{A}) = c^2(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 - ec\hbar\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} = 2mc^2 H_P(\boldsymbol{A}) \tag{21}$$

wobei

$$H_P(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \tfrac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 - \mu_B \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{22}$$

der Pauli-Hamilton-Operator und $\mu_B = e\hbar/2mc$ der Bohr-Magneton ist. Wir können dann die Eigenwertgleichung für ϕ_1 schreiben als

$$H_P(\boldsymbol{A})\phi_1 = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{2mc^2}\phi_1 = \tilde{E}\phi_1 \tag{23}$$

b) Mit dem Magnetfeld entlang der z-Achse und der Eichung $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ haben wir

$$H_P(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\partial_x)^2 + (-i\hbar\partial_y - \tfrac{e}{c}Bx)^2 + (-i\hbar\partial_z)^2\right] - \mu_B B\sigma_z \tag{24}$$

Setzen wir den Ansatz ein bekommen wir

$$\left(\frac{(-i\hbar\partial_x)^2}{2m} + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - \tfrac{e}{c}Bx)^2 - \mu_B B\sigma_z\right)\chi_1(x) = \tilde{E}\chi_1(x) \tag{25}$$

Also muss der Spinor χ_1 ein Eigenzustand von σ_z sein und wir schreiben

$$\chi_1(x) = \chi(x)|\sigma\rangle, \tag{26}$$

wobei $\chi(x)$ eine skalare Funktion und $\sigma_z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$, $\sigma = \pm$ der zweikomponentige Spinorteil ist. Die Eigenwertgleichung für $\chi(x)$ wird dann

$$\left(\frac{(-i\hbar\partial_x)^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - \tfrac{e}{c}Bx)^2\right)\chi(x) = \tilde{E}_{\sigma,k_z}\chi(x), \qquad \tilde{E}_{\sigma,kz} = \tilde{E} + \sigma\mu_B B - \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} \tag{27}$$

Diese Eigenwertgleichung kann auf eine Schrödingergleichung für einen verschobenen Oszillator mit $\omega = |e|B/mc$ zurückgeführt werden. Die Energieeigenwerte sind dann

$$\tilde{E}_{\sigma,k_z} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \Rightarrow \tilde{E} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} - \sigma\mu_B B \tag{28}$$

Durch die Definition $\tilde{E} = (E^2 - m^2c^4)/2mc^2$ haben wir für die positiven Energien:

$$E = \sqrt{2mc^2\tilde{E} + m^2c^4} = \sqrt{|e|c\hbar B(2n+1) + (c\hbar k_z)^2 + \sigma|e|c\hbar B + (mc^2)^2} \tag{29}$$

Definieren wir $n_\sigma = n + (1+\sigma)/2$ so haben wir

$$E = \sqrt{2|e|c\hbar B n_\sigma + (c\hbar k_z)^2 + (mc^2)^2} \tag{30}$$

c) In dem nichtrelativistischen Grenzfall, $|e|c\hbar B n_\sigma/(mc^2)^2 \ll 1$ und $(c\hbar k_z/mc^2)^2 \ll 1$, so haben wir

$$E \approx mc^2 + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} + n_\sigma\frac{|e|\hbar}{mc} = mc^2 + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \sigma\mu_B B \tag{31}$$

Bis auf die Ruheenergie mc^2, die Zeemann-Spinaufspaltung $\sigma\mu_B B$ und die kinetische Energie der Bewegung in der z-Achse $(\hbar k_z)^2/2m$ ist dies das selbe Ergebnis wie in Aufgabe (7) Blatt 2.