Übungsblatt 9: Lösungen

January 17, 2012

29. Dephasierung durch wechselwirkung mit einem Bad.

Betrachten wir ein Spin-1/2-System das an einen harmonischen Oszillator (oder einer Mode eines Strahlungsfeldes) durch σ_z gekoppelt ist:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \sigma_z \hbar g(a^\dagger + a) \tag{1}$$

a) Den Transformierten Hamilton-Operator bekommen wir in dem wir die Eigenschaften $D^\dagger(\sigma_z\alpha)a^\dagger D(\sigma_z\alpha) = a^\dagger + \sigma_z\alpha^*$ und $D^\dagger(\sigma_z\alpha)aD(\sigma_z\alpha) = a + \sigma_z\alpha$ benutzen:

$$\begin{aligned}
H' &= D^\dagger(\alpha\sigma_z)HD(\alpha\sigma_z) \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega D^\dagger(\alpha\sigma_z)a^\dagger D(\sigma_z\alpha)D^\dagger(\sigma_z\alpha)aD(\sigma_z\alpha) \\
&\qquad + \sigma_z\hbar g\left[D^\dagger(\sigma_z\alpha)aD(\sigma_z\alpha) + D^\dagger(\sigma_z\alpha)a^\dagger D(\sigma_z\alpha)\right] \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega(a^\dagger + \sigma_z\alpha^*)(a + \sigma_z\alpha) + \sigma_z\hbar g\left[(a + \sigma_z\alpha) + (a^\dagger + \sigma_z\alpha^*)\right] \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + (\alpha^*\hbar\omega + \hbar g)\sigma_z a + (\alpha\hbar\omega + \hbar g)\sigma_z a^\dagger + \hbar\omega|\alpha|^2 + \hbar g(\alpha + \alpha^*).
\end{aligned} \tag{2}$$

Mit der Wahl $\alpha = \alpha^* = -(g/\omega)$ bekommen wir

$$H' = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a - \hbar g\left(\frac{g}{\omega}\right). \tag{3}$$

Der Zeitentwicklungsoperator ist in dieser Basis $e^{-\frac{i}{\hbar}H't}$. In der alten Basis haben wir dann:

$$U(t) = D(\sigma_z\alpha)e^{-\frac{i}{\hbar}H't}D^\dagger(\sigma_z\alpha), \qquad \alpha = -\frac{g}{\omega}. \tag{4}$$

b) Die Dichtematrix für $t = 0$ ist $\hat\rho_0 = \hat\rho^s \otimes \hat\rho^a$, wobei $\hat\rho^s = \sum_{\sigma\sigma'}\rho^s_{\sigma\sigma'}|\sigma\rangle\langle\sigma'|$ und $\hat\rho^a = |0\rangle\langle 0|$. Das Tensorprodukt ist dann:

$$\hat\rho_0 = \sum_{\sigma\sigma'}\rho^s_{\sigma\sigma'}|\sigma, 0\rangle\langle\sigma', 0|. \tag{5}$$

Dann ist die Dichtematrix für $t > 0$:

$$\hat{\rho}(t) = U(t)\hat{\rho}_0 U^\dagger(t) = \sum_{\sigma\sigma'} \rho^s_{\sigma\sigma'} U(t)|\sigma, 0\rangle\langle\sigma', 0|U^\dagger(t). \tag{6}$$

Und die reduzierte Dichtematrix

$$\hat{\rho}^{\mathrm{red}}(t) = \mathrm{Tr}_a\left[U(t)\hat{\rho}_0 U^\dagger(t)\right] = \sum_n \langle n|U(t)\hat{\rho}_0 U^\dagger(t)|n\rangle. \tag{7}$$

Nehmen wir die Elemente:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{\mathrm{red}}_{\sigma\sigma'}(t) = \langle\sigma|\hat{\rho}^{\mathrm{red}}(t)|\sigma'\rangle &= \sum_n \langle\sigma, n|\hat{\rho}(t)|\sigma', n\rangle \\ &= \sum_n \sum_{\sigma''\sigma'''} \rho^a_{\sigma''\sigma'''} \langle\sigma, n|U(t)|\sigma'', 0\rangle\langle\sigma''', 0|U^\dagger(t)|\sigma', n\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

und notieren dass es allgemein gilt dass für eine Funktion $F(\sigma_z, a^\dagger, a)$ nur die diagonalen Elemente (mit bezug auf das Spin) ungleich null sind:

$$\langle\sigma, n|F(\sigma_z, a^\dagger, a)|\sigma', n'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\langle n|F(\sigma, a^\dagger, a)|n'\rangle. \tag{9}$$

Wir haben dann $\langle\sigma, n|U(t)|\sigma'', 0\rangle = \delta_{\sigma\sigma''}\langle n|U_\sigma(t)|0\rangle$ und $\langle\sigma''', 0|U^\dagger(t)|\sigma', n\rangle = \delta_{\sigma'''\sigma'}\langle 0|U^\dagger_{\sigma'}(t)|n\rangle$ mit

$$U_\sigma(t) = D\left(\sigma\alpha\right) e^{-\frac{i}{\hbar}H_\sigma t} D^\dagger\left(\sigma\alpha\right), \qquad H_\sigma = \sigma\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\omega a^\dagger a - \hbar g\left(\frac{g}{\omega}\right), \tag{10}$$

und für die Elemente

$$\begin{aligned} \rho^{\mathrm{red}}_{\sigma\sigma'}(t) &= \rho^s_{\sigma\sigma'} \sum_n \langle n|U_\sigma(t)|0\rangle\langle 0|U^\dagger_{\sigma'}(t)|n\rangle \\ &= \rho^s_{\sigma\sigma'}\langle 0|U^\dagger_{\sigma'}(t)\sum_n |n\rangle\langle n|U_\sigma(t)|0\rangle \\ &= \rho^s_{\sigma\sigma'}\langle 0|U^\dagger_{\sigma'}(t)U_\sigma(t)|0\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Da $U^\dagger_\sigma(t)U_\sigma(t) = 1$ haben wir für die diagonalen Elemente ($\sigma = \sigma'$)

$$\rho^{\mathrm{red}}_{\sigma\sigma}(t) = \rho^s_{\sigma\sigma} \tag{12}$$

und für $\sigma = +$, $\sigma' = -$

$$U^\dagger_-(t)U_+(t) = e^{-i\omega_0 t}D(-\alpha)e^{i\omega t a^\dagger a}D^\dagger(-\alpha)D(\alpha)e^{-i\omega t a^\dagger a}D^\dagger(\alpha) \tag{13}$$

Benutzen wir die Eigenschaften $D^\dagger(-\alpha) = D(\alpha)$ und $D(\alpha)D(\alpha) = D(2\alpha)$ haben wir

$$U^\dagger_-(t)U_+(t) = e^{-i\omega_0 t}D(-\alpha)\underbrace{e^{i\omega t a^\dagger a}D(2\alpha)e^{-i\omega t a^\dagger a}}_{D(2\alpha e^{i\omega t})}D(-\alpha) \tag{14}$$

Benutzen wir dann die Eigenschaft $D(\alpha)D(\beta) = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)}D(\alpha + \beta)$ haben wir:

$$\begin{aligned} U^\dagger_-(t)U_+(t) &= e^{-i\omega_0 t}D(-\alpha)D(2\alpha e^{i\omega t})D(-\alpha) \\ &= e^{-i\omega_0 t}D(-\alpha)D(2\alpha e^{i\omega t} - \alpha)e^{2i\alpha\sin\omega t} \\ &= e^{-i\omega_0 t}D(2\alpha e^{i\omega t} - 2\alpha)e^{2i\alpha\sin\omega t}e^{-2i\alpha\sin\omega t} \\ &= e^{-i\omega_0 t}D(2\alpha(e^{i\omega t} - 1)) \end{aligned} \tag{15}$$

Und somit haben wir

$$
\begin{aligned}
\rho_{+-}^{\text{red}}(t) &= \rho_{+-}^{s}\langle 0|U_{-}^{\dagger}(t)U_{+}(t)|0\rangle = \rho_{+-}^{s}e^{-i\omega_0 t}\langle 0|D(2\alpha(e^{i\omega t}-1))|0\rangle \\
&= \rho_{+-}^{s}e^{-i\omega_0 t}e^{-2\alpha^2|e^{i\omega t}-1|} \\
&= \rho_{+-}^{s}e^{-i\omega_0 t}e^{-4\alpha^2(1-\cos\omega t)}
\end{aligned} \tag{16}
$$

mit $\alpha = -g/\omega$. In der zweiten Gleichung haben wir die Eigenschaft $\langle 0|D(\beta)|0\rangle = \langle 0|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}$ benutzt. Definieren wir $\gamma(t) = (2g/\omega)^2(1-\cos\omega t)$ haben wir dann

$$
\rho_{+-}^{\text{red}}(t) = \rho_{+-}^{s}e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma(t)} \tag{17}
$$

Für $t \ll 2\pi/\omega$ können wir den Exponenten entwickeln wie $\gamma(t) \approx 2(gt)^2$, d.h. die Kohärenzen nehmen ab wie $\rho_{+-}^{\text{red}}(t) \approx e^{-i\omega_0 t}e^{-2(gt)^2}\rho_{+-}^{s}$. Das sieht fast wie Dekohärenz aus, aber die Funktion $\gamma(t)$ ist periodisch und bei $t = 2\pi/\omega$ gehen die Kohärenzen wieder zu ihrem ursprünglichen Wert zurück (bis auf einen Phasenfaktor), $\rho_{+-}^{\text{red}}(t) = e^{-i\omega t}\rho_{+-}^{s}$.

c) Wiederholen wir die Berechnung für viele Moden

$$
H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_k \hbar\omega_k a_k^{\dagger}a_k + \sigma_z \sum_k \hbar g_k(a_k^{\dagger} + a_k) \tag{18}
$$

haben wir (die Berechnung verläuft analog)

$$
e^{-\gamma(t)} \to \Pi_k e^{-\gamma_k(t)} = \exp\left[-\sum_k \left(\frac{2g_k}{\omega_k}\right)^2 (1-\cos\omega_k t)\right] \tag{19}
$$

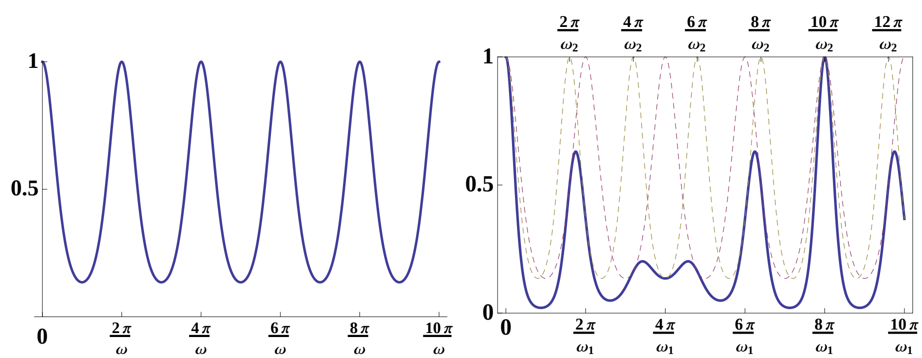

Figure 1: Links: Eine Mode ($e^{-\gamma(t)}$). Wir sehen eine periodische modulierung der Kohärenzen. Rechts: Zwei Moden. Die gestrichelten Linien stellen die Beiträge der individuellen Moden ($e^{-\gamma_1(t)}$ und $e^{-\gamma_2(t)}$) dar, und die volle Linie stellt den Gesamtbeitrag ($e^{-\gamma_1(t)}e^{-\gamma_2(t)}$) dar. Hier sehen wir eine quasiperiodische Modulierung der Kohärenzen. Wenn die Anzahl der Moden zur Unendlichkeit geht, geht die Periode auch zur Unendlichkeit. (In diesem Beispiel ist $\omega_2 = 0.8\omega_1$ und die Periode ist $T = 8\pi/\omega_1 = 10\pi/\omega_2$).

Definieren wir jetzt die Funktion $J(\omega)$:

$$J(\omega) = 2\pi \sum_k g_k^2 \delta(\omega - \omega_k) \tag{20}$$

so können wir den Exponenten umschreiben als

$$4 \sum_k g_k^2 \frac{(1 - \cos \omega_k t)}{\omega_k^2} = 4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) \frac{(1 - \cos \omega t)}{\omega^2}. \tag{21}$$

Durch die Substitution $x = \omega t$ haben wir

$$4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) \frac{(1 - \cos \omega t)}{\omega^2} = 4 \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi t} J\left(\frac{x}{t}\right) \frac{(1 - \cos x)}{x^2/t^2} = \frac{2}{\pi} t \int_0^\infty dx J\left(\frac{x}{t}\right) \frac{(1 - \cos x)}{x^2}. \tag{22}$$

Nach langer Zeit haben wir:

$$e^{-\Gamma t}, \qquad \Gamma = \frac{2}{\pi} J(0) \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\pi/2} = J(0). \tag{23}$$

Der Grund für die irreversible Dephasierung wenn das System mit einem kontinuirlichen Bad von Moden gekoppelt ist (im gegensatz zu wenigen diskreten Moden) ist, dass das System mit unendlich vielen Freiheitsgraden verschränkt wird und die Phaseninformation über einen sehr grossen Hilbert-Raum verteilt ist (und wir sind nur an einem teil dieses Hilbert-Raums - dem Spin - interessiert).

30. Lorentz-Gruppe

a)

$$\Lambda = R_3 : \begin{array}{l} x^1 \mapsto x^{1'} = ax^1 + bx^2 \\ x^2 \mapsto x^{2'} = dx^2 + cx^1 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Die Beschränkung $R_3^T g R_3 = g$ wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(a^2 + c^2) & -(ab + cd) & 0 \\ 0 & -(ab + cd) & -(b^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

Also haben wir die Beschränkungen

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0 \tag{26}$$

Schreiben wir die dritte Gleichung als $c = -ab/d$ und setzen dies in der ersten Gleichung ein haben wir $a^2(d^2 + b^2) = d^2$. Mit der ersten Gleichung bedeutet dies $d = \pm a$. Setzen wir dies wieder in der dritten Gleichung ein haben wir $a(b \pm c) = 0$ also $c = \mp b$. Also haben wir:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & \mp b & \pm a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1 \tag{27}$$

Die Beschränkung $\det R_3 = 1$ ergiebt $\pm(a^2+b^2) = 1$ und fixiert damit das Vorzeichen $(\pm \to +)$. Die Beschränkung $a^2 + b^2 = 1$ können wir als eine Gleichung für den Einheitszirkel $x^2 + y^2 = 1$ verstehen und somit können wir die variablen mit $a = \cos\theta$ und $b = \sin\theta$ parametrisieren. Die Transformation nimmt dann die Form:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

b)

$$\Lambda = L_1 : \begin{array}{l} x^0 \mapsto x^{0\prime} = ax^0 + bx^1 \\ x^1 \mapsto x^{1\prime} = dx^1 + cx^0, \end{array} \qquad a \geq 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Die Beschränkung $L_1^T g L_1 = g$ wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd & 0 & 0 \\ ab - cd & b^2 - d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

Also haben wir die Beschränkungen

$$a^2 - c^2 = 1, \quad b^2 - d^2 = -1, \quad ab - cd = 0 \tag{31}$$

Benutzen wir dann die dritte Gleichung $c = ab/d$ und setzen sie in der ersten ein, bekommen wir $a^2(d^2 - b^2) = d^2$ welches mit der zweiten Gleichung $d = \pm a$ ergibt. Setzen wir dies wieder in die dritte Gleichung ein haben wir $a(b \mp c) = 0$, also $c = \pm b$. Also haben wir:

$$L_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ \pm b & \pm a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 - b^2 = 1 \tag{32}$$

Die Beschränkung $\det L_1 = 1$ gibt uns $\pm(a^2 - b^2) = 1$ welches das Vorzeichen fixiert ($\pm \to +$). Die Gleichung $a^2 - b^2 = 1$ können wir als die Gleichung für eine Hyperbola ($x^2 - y^2 = 1$) verstehen und somit können wir die parametrisierung $a = \cosh\eta$ und $b = -\sinh\eta$ benutzen. Die Transformation nimmt dann die Form:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Schreiben wir $\tanh\eta = \beta = v/c$ mit $\eta > 0$ so haben wir $\cosh\eta = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\sinh\eta = \beta/\sqrt{1-\beta^2}$. Mit dieser parametrisierung haben wir

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

31. Klassisches Teilchen im EM-Feld.

Wir haben die klassische Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m}(P^\mu - \frac{q}{c}A^\mu)(P_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) + \frac{1}{2}mc^2 \tag{35}$$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \{H, x^\mu\}_{P.B} = \frac{\partial H}{\partial P_\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial P_\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu} = \frac{1}{m}(P^\nu - \frac{q}{c}A^\nu)\delta^\mu{}_\nu \tag{36}$$

wobei wir benutzt haben dass $H = \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}(P_\sigma - \frac{q}{c}A_\sigma)(P_\rho - \frac{q}{c}A_\rho)$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_\nu} &= \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial(P_\rho - \frac{q}{c}A_\rho)}{\partial P_\nu}(P_\sigma - \tfrac{q}{c}A_\sigma) + (P_\rho - \tfrac{q}{c}A_\rho)\frac{\partial(P_\sigma - \frac{q}{c}A_\sigma)}{\partial P_\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}\left[\delta^\nu_\rho(P_\sigma - \tfrac{q}{c}A_\sigma) + (P_\rho - \tfrac{q}{c}A_\rho)\delta^\nu_\sigma\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left[g^{\nu\sigma}(P_\sigma - \tfrac{q}{c}A_\sigma) + g^{\rho\nu}(P_\rho - \tfrac{q}{c}A_\rho)\right] \\ &= \frac{1}{m}(P^\nu - \tfrac{q}{c}A^\nu) \end{aligned} \tag{37}$$

Benutzt wurde auch dass $\partial x^\mu/\partial x^\nu = \delta^\mu_\nu$ und $\partial x^\mu/\partial P_\nu = 0$.

Die Bewegungsgleichung für U^μ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dU^\mu}{d\tau} &= \{H, U^\mu\}_{P.B.} = \frac{1}{m}\{H, P^\mu - \tfrac{q}{c}A^\mu\}_{P.B.} \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{\partial H}{\partial P_\nu}\frac{\partial(P^\mu - \frac{q}{c}A^\mu)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial(P^\mu - \frac{q}{c}A^\mu)}{\partial P_\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu}\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[-\frac{(P^\nu - \frac{q}{c}A^\nu)}{m}\frac{q}{c}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \delta^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu}\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[-\frac{q}{c}(\partial_\nu A^\mu)U^\nu - \delta^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu}\right]\end{aligned} \tag{38}$$

Schreiben wir wieder $H = \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}(P_\sigma - \frac{q}{c}A_\sigma)(P_\rho - \frac{q}{c}A_\rho)$ so haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x^\nu} &= \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial(P_\rho - \frac{q}{c}A_\rho)}{\partial x^\nu}(P_\sigma - \tfrac{q}{c}A_\sigma) + (P_\rho - \tfrac{q}{c}A_\rho)\frac{\partial(P_\sigma - \frac{q}{c}A_\sigma)}{\partial x^\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2m}g^{\rho\sigma}\left[-\frac{q}{c}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\nu}(P_\sigma - \tfrac{q}{c}A_\sigma) - (P_\rho - \tfrac{q}{c}A_\rho)\frac{q}{c}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\frac{q}{c}\left[(\partial_\nu A_\rho)U^\rho + U^\sigma(\partial_\nu A_\sigma)\right] \\ &= -\frac{q}{c}(\partial_\nu A_\rho)U^\rho\end{aligned} \tag{39}$$

Also haben wir

$$m\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}\left[-(\partial_\nu A^\mu)U^\nu + \delta^{\mu\nu}(\partial_\nu A_\rho)U^\rho\right] = \frac{q}{c}\left[-(\partial^\nu A^\mu)U_\nu + (\partial^\mu A^\nu)U_\nu\right] = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}U_\nu \tag{40}$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Dieser Tensor ist antisymmetrisch $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ und daher sind die diagonalen Elemente $F^{\mu\mu} = 0$. Für die Raumindizes haben wir

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -(\partial_i A^j - \partial_j A^i) = -\varepsilon^{ij}{}_k B^k \tag{41}$$

wobei $\varepsilon^{ij}{}_k = \varepsilon_{ijk}$ das Levi-Civita Symbol ist (d.h. $\varepsilon_{ijk} = +1$ für $(ijk) = (123), (312), (231)$ und $\varepsilon_{ijk} = -1$ für $(ijk) = (132), (321), (213)$ und $\varepsilon_{ijk} = 0$ sonst).

Weiter haben wir $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c}\partial_t A^i + \nabla_i \Phi = -E^i$. Somit haben wir

$$m\frac{dU^i}{d\tau} = \frac{q}{c}\left(F^{ij}U_j + F^{i0}U_0\right) = \frac{q}{c}\left(-\varepsilon^{ij}{}_k U_j B^k + E^i U_0\right) = \frac{q}{c}\left(\varepsilon_{ijk}U^j B^k + E^i U^0\right) \tag{42}$$

Notieren wir erst, dass $U^0 = \partial x^0/\partial\tau = c\partial t/\partial\tau = c/\sqrt{1-\beta^2}$, so können wir die Bewegungsgleichung auf die Form

$$m\frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = \frac{q}{c}(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}) + \frac{q\boldsymbol{E}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{43}$$

bringen. Danach sollten wir auch notieren, dass $U^i = \partial x^i/\partial\tau = (1/\sqrt{1-\beta^2})\partial x^i/dt = v^i/\sqrt{1-\beta^2}$ und $d\boldsymbol{U}/d\tau = (dt/d\tau)d\boldsymbol{U}/dt = (1-\beta^2)^{-1}d\boldsymbol{v}/dt$. Also haben wir

$$\tilde{m}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E} \tag{44}$$

wobei $\tilde{m} = m/\sqrt{1-\beta^2}$ die relativistische Masse ist. Für $\beta \to 0$ haben wir die nichtrelativistische Bewegungsgleichung (Newton) mit der Lorentzkraft an der rechten Seite.