Karlsruher Institut für Technologie WS 11/12
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen **25.01.12**
http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 11 zur Vorlesung Quantenmechanik II

35 Zusammensetzungen von Lorentz-Transformationen

a) Leiten Sie die relativistische Additionsformel für Geschwindigkeiten, $v = (v_1 + v_2)/(1 + (v_1 v_2/c^2))$ her, indem Sie zwei Lorentz-Boosts $L_1(v_1)$ und $L_1(v_2)$ entlang der x^1-Achse zusammensetzen $L_1(v_1)L_1(v_2) = L_1(v)$.

[**Hinweis**. Um die Additionsformel herzuleiten, ist es einfacher mit der Rapidität η zu arbeiten, wobei $\tanh\eta = v/c$.].

b) $L_1(\Delta\eta)$ sei ein infinitesimaler Lorentz-Boost entlang der x^1-Achse und $R_3(\Delta\theta)$ eine infinitesimale Drehung um die x^3-Achse. Zeigen Sie, dass $R_3^{-1}(\Delta\theta)L_1(\Delta\eta)R_3(\Delta\theta)$ zu erster Ordnung in $\Delta\eta$ und $\Delta\theta$ einen infinitesimalen Boost entlang einer Achse in der x^1-x^2-Ebene entspricht. Zeigen Sie danach, dass die endliche Transformation $R_3^{-1}(\frac{\pi}{2})L_1(\eta)R_3(\frac{\pi}{2})$ einen Lorentz-Boost entlang der x^2-Achse darstellt.

c) Zeigen Sie, dass eine Kombination zweier Lorentz-Boosts $L_1(\eta_1)L_2(\eta_2)$ entlang den x^1- und x^2-Achsen nicht die Form eines reinen Lorentz-Boosts annimmt, d.h. es muss auch eine Drehung beinhalten.

[**Hinweis:** Bedenken Sie welche Symmetrien die Matrix haben muss die einen reinen Boost darstellt.]

36 Chirale Darstellung (Weyl-Darstellung) der Dirac-Gleichung

Die chirale Darstellung der Dirac-Gleichung kann aus der Standard-Darstellung durch eine Transformation $\beta \mapsto M\beta M^{-1}$ und $\alpha^i \mapsto M\alpha^i M^{-1}$ erreicht werden, wobei

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Spinor-Darstellung der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen $S(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, in der chiralen Darstellung eine Blockdiagonale Form hat.

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} S_L(\Lambda) & 0 \\ 0 & S_R(\Lambda) \end{pmatrix} \tag{2}$$

D.h. wenn wir den Spinor $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}$ in zwei zweikomponentige Spinoren ψ_L und ψ_R aufteilen, transformieren sich diese ohne sich zu vermischen, $\psi'_L(x') = S_L(\Lambda)\psi_L(x)$ und $\psi'_R(x') = S_R(\Lambda)\psi_R(x)$. Zeigen Sie, dass $S_R(\Lambda) = (S_L^{-1}(\Lambda))^\dagger$. Zeigen Sie auch, dass die Spinor-Darstellung $S(P) = \gamma^0$ der Raum-Spiegelungen P die Spinoren ψ_L und ψ_R in einander transformieren.

b) Überzeugen Sie sich, dass

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \chi_\pm \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}, \quad \text{mit} \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_\pm = \pm\chi_\pm, \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor im 3-dimensionalen Raum ist, die Dirac-Gleichung in der chiralen Darstellung im Ruhesystem erfüllen. Machen Sie danach einen Lorentz-Boost in ein Inertialsystem in dem das Teilchen den Impuls $\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}$ hat.

c) Zeigen Sie, dass die Lösungen auch Eigenzustände des Helizität-Operators $h(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\cdot\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ mit $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ sind. Zeigen Sie weiter, dass in dem ultrarelativistischen Grenzfall $E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{(c|\boldsymbol{p}|)^2 + (mc^2)^2} \approx c|\boldsymbol{p}| \gg mc^2$ die Lösungen die Formen $\psi_+ \approx \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\psi_- \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$ bekommen, und dass diese Eigenzustände der Chiralitäts-Matrix γ^5 sind.