Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen **20.12.11**

Übungsblatt Nr. 8 zur Vorlesung Quantenmechanik II

25 Kohärente Zustände

Gegeben seien die Operatoren $a^\dagger$ und a mit den Vertauschungsrelationen $[a, a^\dagger] = 1$. Eine Darstellung dieser Algebra ist gegeben durch die Fock Zustände $|n\rangle$: $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$. Der Grundzustand ist definiert durch $a|0\rangle = 0$. Wir definieren den Verschiebeoperator:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \tag{1}$$

wobei der Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass der Verschiebeoperator die folgenden Eigenschaften hat:

i) $D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1$.

ii) $D(\alpha)D(\beta) = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}D(\alpha + \beta)$.

iii) $D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha$ und $D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$.

iv) $D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}$.

v) $e^{i\omega t a^\dagger a}D(\alpha)e^{-i\omega t a^\dagger a} = D(\alpha e^{i\omega t})$.

[**Hinweis:** Viele Eigenschaften können durch die folgenden Relationen (basierent auf der Baker-Campbell-Hausdorff Formel mit $[X, Y] = c \in \mathbb{C}$)

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}, \quad e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y],$$

gezeigt werden.]

b) Wenden Sie den Verschiebeoperator auf den Grundzustand an, $D(\alpha)|0\rangle \equiv |\alpha\rangle$. Die Zustände $|\alpha\rangle$ nennt man 'Kohärente Zustände'. Schreiben Sie den transformierten Zustand $|\alpha\rangle$ als eine Linearkombination von Fock-Zuständen und zeigen Sie, dass dieser Zustand die folgenden Eigenschaften hat:

i) $|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand von dem Operator a, d.h. $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, und der Erwartungswert von $n = a^\dagger a$ ist gegeben von $\langle n\rangle \equiv \langle\alpha|n|\alpha\rangle = |\alpha|^2$.

ii) Die Wahrscheinlichkeit die Quantenzahl n zu messen ist durch eine Poisson-Verteilung gegeben: $P_{|\alpha\rangle}(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}$.

iii) Die Unschärferelation ist durch diese Zustände minimiert, d.h. $\Delta x\Delta p = \hbar/2$, wobei $x = \sqrt{\hbar/2m\omega}(a + a^\dagger)$ und $p = i\sqrt{m\hbar\omega/2}(a^\dagger - a)$.

26 Reduzierte Dichtematrix

Betrachten Sie zwei Spin-1/2-Teilchen in dem Singulett-Zustand.

a) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$, d.h. $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$. Überprüfen Sie explizit, dass es sich bei Ihrem Ergebnis um einen reinen Zustand handelt.

b) Nehmen Sie nun an, dass nur $\vec{S}_1$ als Messgrösse interessiert. Bestimmen Sie die reduzierte Dichtematrix indem Sie den zweiten Spin 'ausspuren': $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2}\rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1'\sigma_2}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^{\text{red}}$ einen gemischten Zustand beschreibt (obwohl $\hat{\rho}$ rein ist).

Bitte wenden ...

27 **Dichtematrix im thermischen Gleichgewicht**
Gegeben sei der Hamilton-Operator für einen harmonischen Oszillator, $H = \hbar\omega a^\dagger a$. Im thermischen Gleichgewicht wird das System durch die Dichtematrix beschrieben,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z}e^{-\beta H}, \qquad Z = \mathrm{Tr}\hat{\rho}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{2}$$

Die Dichtematrix beschreibt einen gemischten Zustand. Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{\rho}|n'\rangle$, wobei $|n\rangle : a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$. Berechnen Sie auch den Mittelwert $\langle n\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{n}\hat{\rho})$.

28 **Bewegungsgleichung der Dichtematrix im Jaynes-Cummings-Model:**
Betrachten wir das Jaynes-Cummings-Model,

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \tag{3}$$

Die ersten beiden Terme des Hamilton-Operators haben die Eigenzustände $|\sigma, n\rangle = |\sigma\rangle \otimes |n\rangle$, wobei $\sigma_z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$, $\sigma = \pm$, und $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$. In dieser Basis hat die Dichtematrix $\hat{\rho}$ die Elemente $\rho_{(\sigma n),(\sigma' n')} = \langle\sigma n|\hat{\rho}|\sigma' n'\rangle$. Die Bewegungsgleichung der Dichtematrix ist durch die Liouville-Gleichung gegeben:

$$i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [H, \hat{\rho}]. \tag{4}$$

Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die Elemente $\rho_{(\sigma n),(\sigma' n')}$,

$$\dot{\rho}_{(\sigma n),(\sigma' n')} = \frac{1}{i\hbar}\sum_{(\tilde{\sigma}\tilde{n})}\left(H_{(\sigma n),(\tilde{\sigma}\tilde{n})}\rho_{(\tilde{\sigma}\tilde{n}),(\sigma' n')} - \rho_{(\sigma n),(\tilde{\sigma}\tilde{n})}H_{(\tilde{\sigma}\tilde{n}),(\sigma n)}\right) \tag{5}$$

explizit aus. Berechnen Sie dazu die Matrixelemente des Hamilton-Operators, $H_{(\sigma n),(\sigma' n')} = \langle n\sigma|H|\sigma' n'\rangle$, und danach die Summe über $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{n}$.